НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

АРХИМЕД
Закон Архимеда

7

Эврика!
Радость открытия

DeAGOSTINI

АРХИМЕД Закон Архимеда
7

SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Архимед из Сиракуз жил в эпоху войн, поэтому не удивительно, что часть своего дарования он направил на создание машин, призванных защитить его родной город. Ученый внес серьезный вклад в эту сферу деятельности, впрочем, как и во все другие, входящие в круг его интересов: математику, физику, инженерное дело, астрономию... Он вычислил площадь сегмента параболы с помощью метода, который можно считать предвестником интегрального исчисления. Он открыл физические законы работы рычага и даже осмелился сосчитать количество песчинок, которыми можно заполнить Вселенную, — такое огромное число, что Архимеду пришлось изобретать собственный способ его записи! Но более всего древнегреческого ученого прославило открытие закона гидростатики, носящего теперь его имя. Данный закон, без сомнения, является одним из самых важных в истории, и он по праву удостоился того радостного возгласа, который с тех пор стал символом научного открытия: «Эврика!»

Прим. OCR: Врезки текста выделены жирным шрифтом. Символ "корень квадратный" заменен в тексте SQRT().

-
- Наука. Величайшие теории: выпуск 7: Эврика! Радость открытия.
- Введение
- ГЛАВА 1
  -
  - Научное наследие Архимеда
  - Константинопольский палимпсест
- ГЛАВА 2
  -
  - Закон Архимеда и корона тирана Гиерона
  - Закон рычага
  - Исчисление песчинок
  - Октады Архимеда
- ГЛАВА 3
  -
  - Методы Архимеда
  - В поисках числа π
  - Пусть это изобразят на моем надгробии!
  - Спираль Архимеда
  - Квадратура параболы

- Задача о быках
-
- Искусство нарезки параболоидов
- Сапожный нож и солонка
- Трехмерные архимедовы фигуры

- ГЛАВА 4
  -
  - Гигантская «сиракузия» и архимедов винт
  - Тепловой луч
  - Коготь Архимеда
  - Катапульта
  - Наблюдатель неба
  - Память об Архимеде
- Приложение
- Список рекомендуемой литературы
- Указатель

Наука. Величайшие теории: выпуск 7: Эврика! Радость открытия. Архимед. Закон Архимеда.

Пер. с итал. — М.: Де Агостини, 2015. — 160 с.
ISSN 2409-0069
© Eugenio Manuel Fernandez Aguilar, 2012 (текст)
© RBA Collecionables S.A., 2012 © ООО «Де Агостини», 2014-2015
Наука. Величайшие теории Выпуск № 7, 2015 Еженедельное издание
© Eugenio Manuel Fernandez Aguilar, 2012 (текст)

Введение

Моей сестре Джеки, потому что своими гелиоскопами и «эврикой» она всегда рада поделиться со всеми, ничего не прося взамен.

Международный математический союз учредил медаль Филдса, которая раз в четыре года вручается одному или нескольким (вплоть до шести) математикам, так или иначе отличившимся в своей научной области. Данная награда представляет собой высшую почесть, которой может удостоиться математик, потому что для этой науки Нобелевской премии не предусмотрено. На одной из сторон медали выбита строка римского поэта Марка Манилия, она обрамляет рельефный портрет Архимеда: Transire suum pectus mundoque potiri («Превзойти человеческую природу и покорить Вселенную»).

Математик, физик, инженер и астроном — такие определения обычно встречаются во множестве текстов об Архимеде из Сиракуз, человеке, посвятившем свою жизнь науке и оставившем в ней неизгладимый след на более чем две тысячи лет. Познакомиться с личностью Архимеда можно лишь совершив путешествие по его научным трудам, так как, по счастью, до нас дошли многие из его трактатов, чего нельзя сказать о деталях его биографии. Все, что сохранилось до наших дней, — это огромное количество книг по математике, содержащих в себе исследования по геометрии, арифметике и алгебре; среди них, например, удивительно точное вычисление величины, которая ныне называется числом пи. Ученый был почти полным современником Евклида — великого математика, чей главный труд «Начала» посвящен систематическому построению геометрии. Трактаты Архимеда поражают исключительной строгостью и весомостью, которых не удалось превзойти за последующие века, а также изящностью построений, делающей их приятным и гармоничным чтением. Можно даже сказать, что с академической точки зрения речь идет о фундаментальных текстах. Архимед занимался шарами, квадратами, параболами, параболоидами и огромным количеством других геометрических фигур. Но он не только исследовал то, что было известно в его время, но и вводил в математику новые геометрические фигуры, такие как спираль и разные трехмерные фигуры, носящие его имя. Вклад греческого математика в геометрию всем известен, но для большинства людей остается незамеченным другой неоспоримый факт:

Архимед одним из первых начал использовать вычисления бесконечно малых величин, сделав таким образом первый шаг к интегральному исчислению. Очень жаль, но его идеи на данную тему не нашли сколько-нибудь серьезного отклика в научном сообществе из-за своей сложности, и вплоть до Нового времени им не придавали особого значения. Как бы то ни было, наследие Архимеда в этой области могло бы стать частью вводного курса математики университетского уровня.

Несмотря на вышесказанное, нельзя не признать, что фигура Архимеда у большинства людей преимущественно ассоциируется с физикой и инженерным делом. Связано это со знаменитыми законом Архимеда и законом рычага, которые помнят практически все. Принимая ванну, мы каждый раз чувствуем уменьшение нашего веса или замечаем повышение уровня воды. И кто из нас не открывал бутылки, используя как рычаг нож или ножницы? То, что два этих открытия близки к нашей повседневной жизни, сделало их такими популярными, не говоря уже об их простоте. Значительную часть математики и физики Архимеда можно было бы охарактеризовать как «повседневную» в смысле набора исследуемых явлений. В истории науки неоднократно случалось, что ученые занимались в первую очередь вопросами, касающимися непосредственно окружающего их мира, оставив более глубокие проблемы для будущих поколений. Так, исторический анализ показывает, что первые ученые пытались объяснить причины и способы функционирования самых обычных природных явлений, закладывая, таким образом, базу для современной нам науки. И Архимед — одно из первых звеньев этой цепи.

Он был человеком с широкими связями как в политических, так и в научных кругах. Дошедшие до нас источники подтверждают, что ученый вел оживленную переписку с Эратосфеном Киренским, который упоминается в книгах по истории науки как человек, первым измеривший радиус Земли (причем измерение он выполнил с необыкновенной точностью). И с ним, и с другими учеными своего времени Архимед часто обменивался письмами. Его сохранившиеся трактаты начинаются с личного письма, представляющего собой вместе с тем предисловие к самой научной работе. Известно и о тесных связях Архимеда с Гиероном II, царем Сиракуз и, кроме того, его родственником. Это Гиерон II подвиг Архимеда к постройке множества механизмов, многие из которых были военными машинами. Как раз благодаря его дружбе с царем известны некоторые детали биографии ученого. Например, мы знаем со слов Архимеда о том, что его отец Фидий был астрономом, и это,

вероятно, повлияло на его образование.

Исторический момент, на который пришлась жизнь сиракузского мудреца, был непростым: речь идет об эпохе Пунических войн. Сиракузы занимали стратегическое положение между римлянами и карфагенянами, что стало актуальным, когда между этими двумя могущественными державами вспыхнула война. Эпоха, в которой выпало жить ученому, оказала влияние на круг его научных и технических изысканий. Несомненно, рассказ об обороне Сиракуз не может обойтись без описания вклада в нее Архимеда. Именно из-за этого вклада его часто представляют как великого инженера, настолько успешно построившего защиту города, что благодаря его изобретениям Сиракузы два года выдерживали римскую осаду.

Эту книгу мы начнем с биографии Архимеда (хотя, к сожалению, о его жизни известно не так много), включив ее, как было упомянуто выше, в общий социальный и исторический контекст. Мы рассмотрим некоторые наиболее достоверные источники, рассказывающие о его жизни, чтобы, насколько возможно, познакомиться поближе с великим математиком. В первой главе будет представлен список его сочинений, и мы остановимся на наиболее важных из них. Они достаточно просты в чтении для каждого, кто знаком с математическими и, особенно, геометрическими текстами.

Во второй главе нас ждут темы, связанные с физикой. Прежде всего, мы займемся знаменитым законом Архимеда и обратимся к рассказу о короне царя Гиерона II, а также популярнейшему возгласу «Эврика!», который издал Архимед после принятия, вероятно, самой известной в истории науки ванны. Затем мы не сможем обойти вниманием закон рычага. Мы разберем математический аппарат, который разработал в данной области Архимед. И наконец, в той же второй главе мы расскажем о его труде в области измерения Вселенной, где излагается, помимо прочего, интересный способ выражения больших чисел.

Третья глава посвящена основным математическим достижениям сиракузского мудреца, в ней мы рассмотрим главным образом ряд математических рассуждений, простых для понимания и призванных пояснить выкладки самого Архимеда современным языком. В той же главе нас ждет удивительное путешествие к истокам дифференциального исчисления. Оно начнется с анализа методов, использованных Архимедом. Мы рассмотрим различные фигуры, связанные с геометрией (окружности, параболы, спирали и тому подобное), а также покажем метод, с помощью которого Архимед приблизился к идее пределов, что интересно с математической точки зрения;

разберем «Задачу о быках», написанную в поэтической форме и посвященную разным способам подсчета поголовья скота. Еще мы исследуем свойства особых геометрических фигур — «сапожного ножа» и «солонки».

В четвертой и последней главе мы обсудим некоторые изобретения, приписываемые герою нашей книги. Чтобы сделать чтение более увлекательным, они будут рассматриваться не столько в техническом аспекте, сколько с точки зрения их пользы, а также проблемы авторства нашего персонажа. Мы поговорим о винте Архимеда, о гигантском корабле, носившем имя «Сиракузия», о зажигательных зеркалах, о катапультах...

Кроме того, в данной работе представлена дополнительная информация как об историческом контексте, так и о других авторах или научных результатах, которая может быть интересна читателю. Знать научную биографию Архимеда будет полезно каждому по многим причинам. С одной стороны, темы его исследований нередко проявляются в нашей повседневной жизни: например, когда мы летом купаемся в море, когда открываем дверь или чертим окружность. С другой стороны, в трудах Архимеда преподаватели и учителя могут найти немаловажные сведения для обучения в любой из областей математики и физики. Учащиеся, со своей стороны, закрепят знания, и даже сложившиеся ученые, возможно, найдут для себя что- то новое, учитывая сжатость университетских и аспирантских курсов.

Значимость следа, оставленного Архимедом в истории, можно оценить по тому факту, что он входит в число людей, которых знает любой человек, независимо от уровня образования. Если бы мы составляли список самых знаменитых ученых, Архимед оказался бы в нем среди тех, кого можно перечислить по пальцам одной руки, рядом с Галилеем, Ньютоном и Эйнштейном. Конечно, существуют и другие физики, повлиявшие на историю человечества, но то ли в соответствии с заслугами, то ли по прихоти судьбы именно эта четверка является ведущей в современной популярной культуре.

Хотя имя Архимеда обросло множеством мифов и легенд, надо признать, что его действительные достижения куда многочисленнее легенд и анекдотов, которые о нем рассказывают. Чаще всего Архимеда вспоминают как человека, который кричал «Эврика!», или как автора фразы «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю», но масштаб его гения значительно больше этой пары известных выражений. В случае Архимеда мы можем с уверенностью утверждать, что действительность превосходит фантазию.

287 до н. э. Приблизительная дата рождения Архимеда из

Сиракуз на Сицилии. Его отец был астрономом и родственником Гиерона II, царя Сиракуз с 270 по 216 г. до н. э.

279 до н. э. Конец правления Икета, тирана Сиракуз.

278 до н. э. После победы в битве при Аускуле (279 до н. э.) эпирский царь Пирр заключает с Римом перемирие.

270 до н. э. Рождение Гелона, сына Гиерона II Сиракузского, которому Архимед посвятил свой трактат «Исчисление песчинок», где он задается вопросом, сколько необходимо песчинок, чтобы заполнить Сиракузы, Сицилию, Землю...

268 до н. э. Рождается Марк Клавдий Марцелл, будущий командующий римской армией во Второй Пунической войне.

265 до н. э. Гиерон II наносит поражение мамертинцам и становится тираном Сиракуз.

264 до н. э. Начало Первой Пунической войны. Сиракузы заключают с Карфагеном союз против Рима.

263 до н. э. Гиерон II подписывает мирный договор с Римом.

260 до н. э. Архимед формулирует закон рычага, став первым математиком, который смог применить геометрический аппарат своего времени для объяснения физических явлений.

247 до н. э. Рождение Ганнибала, будущего карфагенского военачальника.

241 до н. э. Конец Первой Пунической войны.

240 до н. э. Эратосфен разрабатывает карту известного мира. Начинается его переписка с Гиероном II и Гелоном.

230 до н. э. Первые исследования конических сечений греческим геометром Аполлонием Пергским.

218 до н. э. Начало Второй Пунической войны между Римом и Карфагеном. Перейдя через Альпы, Ганнибал вступает в Италию.

216 до н. э. Смерть Гелона.

215 до н. э. Смерть Гиерона II. Сын Гелона Иероним вступает на царский трон Сиракуз.

213 до н. э. Нападение Марцелла на Сиракузы оказалось неудачным благодаря машинам Архимеда. Начинается осада Сиракуз.

212 до н. э. Сиракузы хитростью захвачены римлянами. Архимед убит при разграблении города.

80 до н. э. Цицерон обнаруживает могилу Архимеда в Сиракузах.

ГЛАВА 1
Древний мудрец

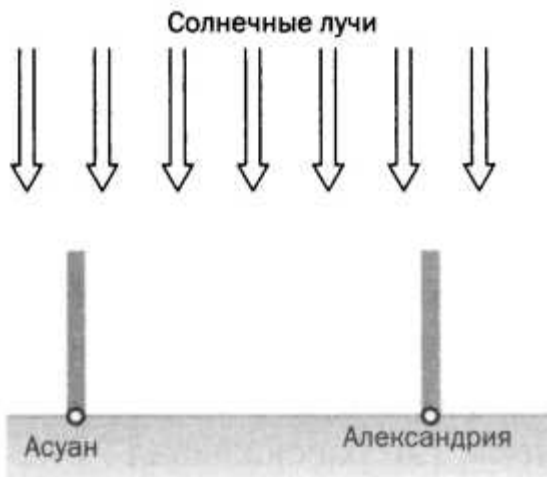
В III столетии до н. э. начался так называемый Золотой век греческой математики. Именно тогда родился Архимед, наряду с Евклидом, а также Аполлонием из Пергама. Жизнь ученого была относительно спокойной, если учесть тот факт, что она пришлась на эпоху Пунических войн. Все свое существование Архимед посвятил изучению математики и ее применению в области физики, поэтому его по праву считают первым матфизиком в истории человечества.

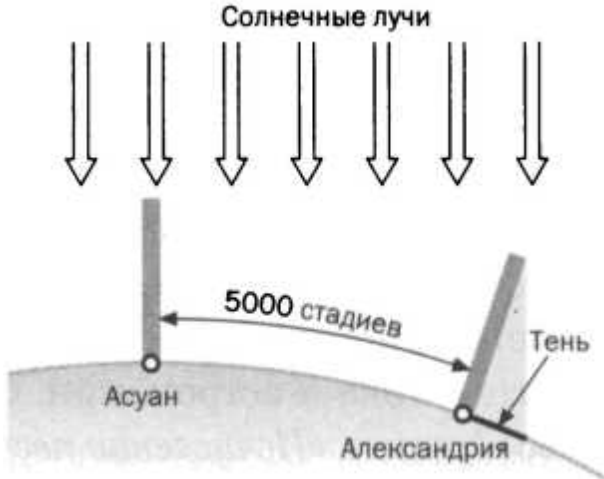
До нас дошло не так много сведений о жизни Архимеда — ученого, проявившего себя в математике, физике, астрономии, инженерном деле и сыгравшего важнейшую роль в развитии военного искусства и в политическом процессе того времени. Все, что мы знаем о нем, происходит из нескольких источников: книги греческих и римских авторов, любопытные факты, рассказанные образованными людьми того времени, а также письма и труды самого Архимеда. Греческий математик Евтокий Аскалонский (480-540) упоминает биографию, написанную другом Архимеда, Гераклидом, которая, к сожалению, была утеряна. Из нее до нас дошло единственное свидетельство о том, что Архимед родился в городе Сиракузы около 287 года до н.э. А его смерть в 212 году до н.э. от руки римского солдата похожа на эпилог научно-популярного приключенческого романа. Тот факт, что отец ученого, Фидий, был астрономом, вполне возможно, повлиял на его развитие и пробудил в нем интерес к математике и астрономии. Сам Архимед упомянул об отце в своей книге «Исчисление песчинок», где рассказывал об измерении диаметра Солнца и Луны.

Хотя Архимед и провел почти всю жизнь в Сиракузах, в молодости он побывал в Египте — главным образом в Александрии, как утверждает Диодор Сицилийский, историк I века до н. э. И не важно, заслуживает это свидетельство доверия или нет: без сомнения, Архимед общался с александрийскими учеными, о чем свидетельствует его переписка, хотя она дошла до нас лишь частично. Исследователи неоднократно высказывали гипотезу, что Архимед получил математическое образование у кого-то из учеников греческого математика Евклида (325-265 до н. э.), что может быть подтверждено его научными трудами и наложило отпечаток на стиль практически всех его работ.

КАК ИЗМЕРИТЬ ЗЕМЛЮ С ПОМОЩЬЮ ТЕНИ ОТ ПАЛКИ

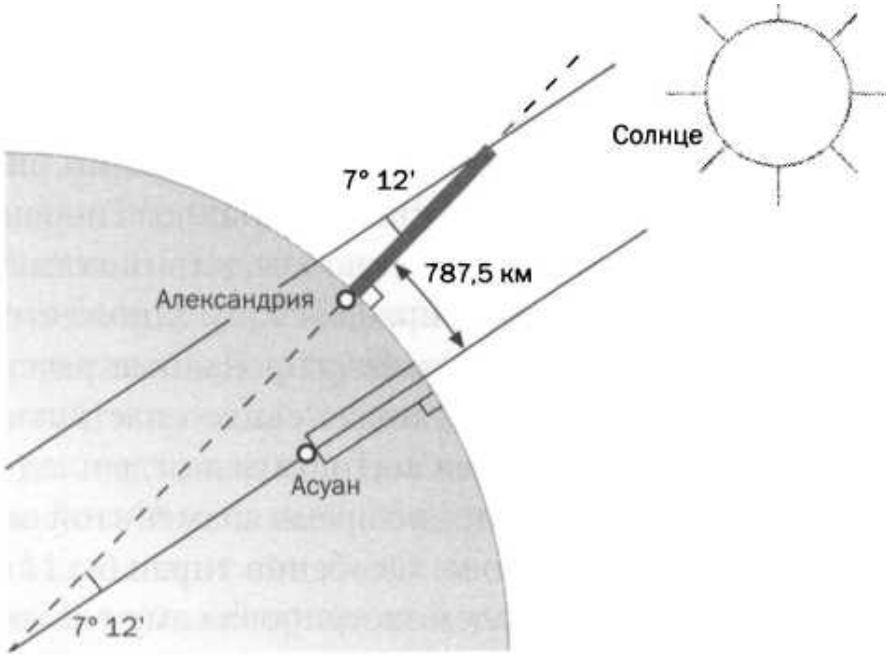
Эратосфен из Кирены смог вычислить диаметр Земли с погрешностью не более 1,5%, что сегодня, возможно, не покажется чем-то удивительным. Однако стоит напомнить, что данные измерения проводились в III веке до н. э. Ученый знал, что в городе Сиене (ныне Асуан в Египте) в день летнего солнцестояния предметы не отбрасывают тени и что дно луж освещено. Этот факт подтолкнул его к идее, изумительной своей простотой и изяществом: если измерить тень от некоего предмета в городе, расположенном на той же географической долготе (на том же меридиане), что и Сиена, то можно определить угол, на который различаются вертикали в этих двух городах из-за окружности Земли и экстраполировать таким образом результат (см. рисунок). Пользуясь своими возможностями хранителя Александрийской библиотеки, он отправил группу рабов измерить расстояние между Александрией и Сиеной, которое оказалось равным 5000 египетских стадиев.





Если бы Земля была плоской, то во время летнего солнцестояния никакие объекты в обоих городах не отбрасывали бы тени, как можно видеть на рисунке.

Измерив тень, Эратосфен вычислил, что упомянутые два города расположены на расстоянии 1/50 части земной окружности, то есть угол между вертикалями в этих городах оказался 7°12' (см. рисунок). Полученные данные позволили ему произвести несложное вычисление: полная окружность составляет 50 · 5000 = 250000 египетских стадиев. Среди ученых есть определенные расхождения в том, какова была точная длина египетского стадия, но если мы посчитаем измеренное расстояние между Александрией и Сиеной точным, то египетский стадий окажется равен 157,2 м. Таким образом, длина земной окружности по Эратосфену будет 39300 км, а радиус — 6256 км. Учитывая, что в настоящее время радиус Земли, измеренный непосредственно, принято считать равным 6371, результат древнегреческого ученого изумителен.



Данная схема показывает, что измеренный угол между предметами, отбрасывающими тень, это и есть тот самый угол разницы между вертикалями для двух городов на земном шаре. Он составляет 50-ю часть от 360°.

Одним из адресатов его писем и книг был Эратосфен из Кирены (276-194 до н. э.), хранитель Александрийской библиотеки с 236 года до н. э. и вплоть до конца своих дней. Архимед должен был оказывать ему уважение и делиться с ним своими научными идеями, чтобы увековечить их. Кроме того, слава Эратосфена как математика выходила далеко за пределы Александрии. Ведь это ему первому удалось измерить диаметр Земли с удивительно малой для того времени погрешностью. Архимед направил Эратосфену свой труд «Метод механических теорем», где объяснял свою систему работы. Данный трактат считался утерянным вплоть до 1906 года, когда историк-эллинист Йохан Людвиг Гейберг обнаружил константинопольский палимпсест (известный также как «палимпсест Архимеда»). Долгое время многие ученые считали, что Архимед ревниво охранял свою методологию, но находка упомянутого текста опровергла это. Еще одним александрийским корреспондентом ученого был Конон Самосский (280-220 до н. э.), наряду с Досифеем из Пелузия (вторая половина III в. до н. э.). Первого Архимед называл «другом и человеком, достигшим вершин в математике». После смерти Конона ученый решил отправить

некоторые свои работы Досифею, так как последний знал Конона и был искушен в геометрии. До нас не дошли письма, адресованные Конону, но мы знаем, что Досифею Архимед послал две книги трактата «О шаре и цилиндре» и три законченных труда — «О коноидах и сфероидах», «О спиралях» и «О квадратуре параболы».

Архимед поддерживал тесные отношения с Гиероном II (306-215 до н. э.), тираном Сиракуз с 270 по 215 годы до н. э. Не исключено, что они были родственниками, поскольку Фидий, отец Архимеда, возможно, приходился Гиерону II двоюродным братом. Сам же Архимед впоследствии посвятил свое «Исчисление песчинок» сыну тирана Гелону. Множество источников приводят документально зафиксированные рассказы о Гиероне II и Архимеде, так или иначе свидетельствующие об их сотрудничестве в политике и военном деле, где плоды этой работы в полной мере проявились во время знаменитой осады Сиракуз, уже после смерти Гиерона. Особенно тиран был впечатлен, когда его родственник продемонстрировал ему сложный механизм собственного изобретения — с его помощью ему удалось сдвинуть огромный и тяжелый корабль, приложив совсем небольшое усилие. Обычно, рассказывая эту историю, вспоминают фразу Архимеда: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!» Ее приводит Папп Александрийский (290-350), и она часто служит для иллюстрации закона рычага, речь о котором пойдет в следующих главах.

Изумление Гиерона было столь велико, что он «поручил Архимеду построить осадные машины всяческих видов, как для нападения, так и для защиты», — рассказывает греческий историк Плутарх (ок. 50-120) в своем жизнеописании Марцелла.

Марцелл, изумленный этим необыкновенным дарованием, отдал приказ сохранить ему жизнь, так как для Марцелла слава спасения Архимеда была равна славе взятия Сиракуз.

Валерий Максим, римский историк I века до н. э.

Тут интересно вкратце вспомнить историю осады Сиракуз из-за особой роли в ней Архимеда. Хотя обе стороны конфликта были ослаблены предыдущими схватками, в ответ на разрушение карфагенянами города Сагунт (в Испании) Рим решил объявить войну Карфагену. Так началась Вторая Пуническая война, тянувшаяся с 218 до 201 года до н. э. Командующий карфагенскими силами Ганнибал Барка (247-183 до н. э.) в конце концов разбил римскую армию и угрожал уже самому Риму.

Тогда римский консул Марк Клавдий Марцелл (268-208 до н.

э.) отправился с войском на Сицилию, чтобы завоевать остров любой ценой. Там находился город-государство Сиракузы, в то время бывший греческим полисом.

Марцелл, по словам Плутарха, «был настоящим воином — и по роду занятий, и по складу ума», и «не было такого вызова, который бы он не принял». Тем не менее ему пришлось осаждать Сиракузы 18 месяцев — взять их приступом оказалось невозможно. Марцелл и его солдаты не учли, что в городе находится самый великий греческий математик того времени и один из самых значительных мудрецов древности — Архимед.

Римский военачальник провел пять дней в подготовке осады Сиракуз, собирая и расставляя все свои силы и вооружения.

Город был обложен со всех сторон: и со стороны стен, протянувшихся на 27 км, которые защищали его с суши, и со стороны моря, и со стороны акрополя.

В то время как сам Марцелл руководил нападением с моря, его заместитель Аппий Клавдий взял на себя атаку с суши. Флот Марцелла насчитывал 60 квинквирем (большой военный корабль с пятью рядами весел), полных солдат, вооруженных луками и пращами, чтобы сбивать со стен защитников города. Восемь из этих квинквирем были соединены между собой попарно (у каждой весла были сняты с одной стороны), образовав таким образом плавучие платформы, на которых стояли самбуки — машины, изобретенные Гераклидом Тарентским (не путайте с носившим то же имя биографом Архимеда), с жутким грохотом падающие на стены. На верху самбук были устроены площадки, и на каждой их стороне размещалось по три воина, чтобы подавлять сопротивление защитников крепостных стен.

У Архимеда в голове было больше воображения, чем у Гомера.
Вольтер

Как уже было сказано, Марцелл являлся опытным солдатом и имел большие способности к военному делу, однако он был еще и образованным человеком. Архимеду удалось, используя свой талант, отразить наступление врага: все атаки неприятеля захлебывались. Он приготовил машины как для защиты, так и для атаки: некоторые бросали дротики на любые дистанции, были среди них и баллисты с катапультами, более совершенные, чем у противника. Последние с огромной силой метали гигантские камни на такие расстояния, которые римлянам казались невероятными. За стенами города скрывались всевозможные механизмы, неизвестные Марцеллу и Аппию. Самбуки римских квинквирем рассыпались как карточные домики под ударами

каменных глыб и свинцовых ядер, посылаемых новыми метательными орудиями. «Железная рука, привязанная к канату» хватала корабли и, подняв их в воздух, бросала обратно на скалы. Римских солдат охватила настоящая паника, ведь они никогда не видели ничего подобного: машины, придуманные Архимедом, неожиданно появлялись сверху и обрушивали на них шквал снарядов, сея ужас в рядах нападающих. В течение месяцев, на которые растянулась осада, ни один штурм не увенчался успехом. Марцелл и его люди были в отчаянии, они не знали, что делать и как действовать дальше. Еще одним безуспешным ходом римлян стала попытка блокады, чтобы не допустить подвоза съестных припасов в город. Как написал грек Полибий из Мегалополиса (200-118 до н. э.) в своей «Всеобщей истории»: «...у них не было способностей Архимеда, и они и представить себе не могли, что иногда один талант значит больше, чем усилия множества рук». И там же: «...они уже не осмеливались пытаться идти на приступ», потому что «в некоторых сражениях столь велико могущество одного человека и его искусства, примененного должным образом». Способ, которым римлянам удалось в конце концов взять Сиракузы, так и остается до конца не ясен. Плутарх предполагает, что они под покровом ночной темноты проникли в город через плохо охраняемую башню и, вполне возможно, не без помощи местного предателя. Римляне воспользовались тем, что в Сиракузах в этот момент был праздник в честь богини Артемиды: развлечения и вино помогли им справиться с охраной. Когда в осажденном городе поняли, что происходит, римские легионеры уже были на улицах. Это случилось в 212 году до н. э.

В общих чертах историки согласны между собой насчет обстоятельств смерти Архимеда, а именно в том, что его жизнь оборвал меч простого римского солдата. А из трех версий, приводимых Плутархом, самой распространенной стала — то ли потому, что часто пересказывается в последующей литературе, то ли по причине своего романтизма — такая история:

«[...] в тот момент он как раз исследовал некую геометрическую фигуру и, думая только о ней и глядя лишь на нее, не заметил вторжения римлян и захвата ими города. Неожиданно перед ним возник солдат, который потребовал следовать за ним к Марцеллу.

Но Архимед не хотел делать этого, пока не решит свою задачу до конца. В результате разгневанный солдат вытащил меч и убил его».

В литературе также встречается рассказ о том, что солдат

страшно разозлился, когда Архимед якобы произнес свои последние слова: «Не трогай моих кругов!» Естественно, никто не может в точности знать подробности событий, ставших причиной гибели сиракузского мудреца, но. множество свидетельств сходятся в одном: это сделал именно простой солдат.

ПУНИЧЕСКИЕ ВОЙНЫ

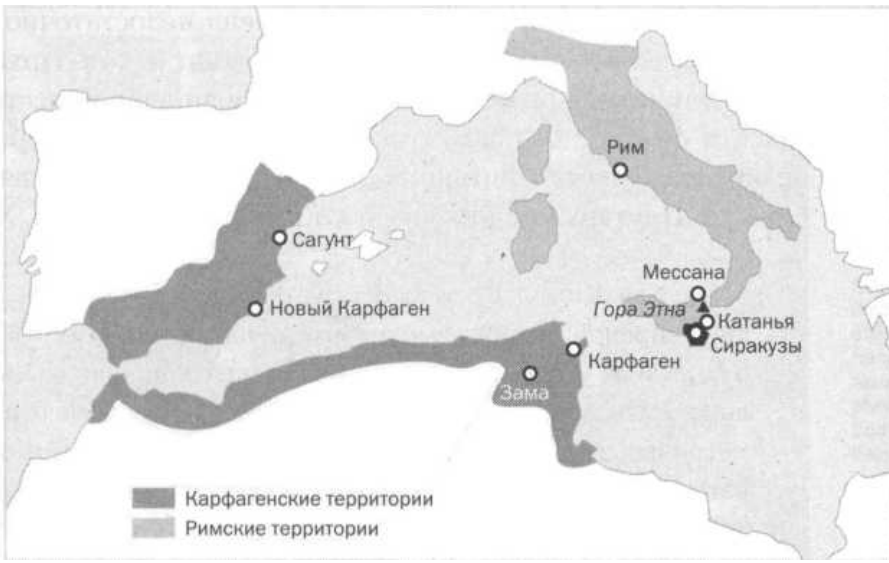
В ходе нескольких Пунических войн Рим противостоял Карфагену с 264 по 146 годы до н. э. Их название происходит от латинского слова punici («пунийцы»), восходящего к phoenici («финикийцы»). Римляне называли так карфагенян из-за их финикийского происхождения. Главной причиной конфликта стала экспансия Рима на юг Италии, которая угрожала финикийскому владычеству в этом регионе. Всего Пунических войн было три, и Архимед застал две из них.

Первая Пуническая война (264-241 гг. до н. э.)

Первый военный конфликт начался на Сицилии и длился 23 года. Группа солдат-наемников, называющая себя мамертинцами, бежала в Мессану (нынешняя Мессина), город на северо-востоке Сицилии. В 289 году до н. э. они силой захватили этот город, изгнав оттуда мужчин и оставив себе женщин. В 270 году дон. э. Гиерон II из Сиракуз (в то время — греческий город) решил выступить против мятежников, чтобы положить конец пиратству, которым они занимались. Но мамертинцы попросили защиты у Рима, и Сиракузы были вынуждены обратиться за помощью к Карфагену. Происходящее вылилось в серьезную конфронтацию, которая в 264 году до н. э. переросла в Первую Пуническую войну. Несмотря на превосходство на море карфагенян, которые избегали столкновений на суше, римляне уже в первые два месяца войны захватили инициативу. В 241 году до н. э. был подписан мирный договор, согласно которому римляне получили контроль над Сицилией. Сиракузы сохранили независимость.

Вторая Пуническая война (218-201 до н. э.)

Именно в ходе этой войны Архимед применил свои изобретения для защиты Сиракуз во время их осады римлянами. Тем не менее в 212 году до н. э. город был захвачен. Вторая Пуническая война велась на трех театрах боевых действий: Италия, Испания и Сицилия. Начался конфликт со взятия Сагунта Ганнибалом — карфагенским военачальником, который стремился уничтожить Рим. В 201 году до н. э. Ганнибал был разбит Сципионом Африканским (236-183 до н: э.).



Распределение территорий к концу Второй Пунической войны.

Однако правда и то, что Марцеллу вовсе не по душе пришлось известие о смерти человека, кого он впоследствии назвал «Бриареем среди геометров», скорее всего потому, что для него была бы «большая слава в сохранении жизни Архимеда при взятии Сиракуз». В древнегреческой мифологии Бриарей — это чудовищный гигант с сотней рук и пятьюдесятью головами. Именно таким Марцелл видел человека, который осмелился встать у него на пути. Рассказывают, что он с презрением отвернулся от убившего Архимеда солдата и с большим уважением отнесся к семье математика. От византийского историографа и филолога Иоанна Цеца (1110-1180) мы знаем, что Архимед «работал над геометрией до самого преклонного возраста, а прожил он 75 лет» — свидетельство, позволяющее отнести дату рождения ученого к 287 году до н. э.

Рассказ о смерти Архимеда являет нам рассеянного ученого,

обращенного внутрь себя и не участвующего в общем деле, по крайней мере лично. Иногда кажется, что подобный образ возник из многочисленных фильмов и литературных произведений, но на самом деле уже римские историки описывали личность Архимеда именно так. Естественно, древнегреческий математик был склонен к абстрактным рассуждениям, о чем свидетельствуют его труды, если, конечно, не принимать во внимание его интереса к практическим экспериментам. Поэтому нет ничего удивительного в том, что он просто по роду своих занятий постоянно пребывал в задумчивом состоянии и чуждался повседневной жизни. В те времена недостаточно богатый человек не мог посвятить себя математике, но Архимеду посчастливилось родиться на вершине социальной лестницы; так что он смог целиком отдаться исследованиям, вероятно, не обращая особого внимания на окружающую его реальность. Об этом Плутарх пишет в своей «Жизни Марцелла» (И, XVII):

«И нельзя не верить рассказам, будто он был тайно очарован некоей сиреной, не покидавшей его ни на миг, а потому забывал о пище и об уходе за телом, и его нередко силой приходилось тащить мыться и умащаться, но и в бане он продолжал чертить геометрические фигуры на золе очага и даже на собственном теле, натертом маслом, проводил пальцем какие-то линии — поистине вдохновленный Музами, весь во власти великого наслаждения».[1 Перевод С. П. Маркиша в обработке С.С. Аверинцева.]

Однако вполне возможно, что степень безразличия, которое якобы выказывал Архимед к материальному миру, несколько преувеличена.

Анонимная гравюра XVI века, на которой изображен Архимед, планирующий защиту Сиракуз.

Фрагмент страницы палимпсеста Архимеда (фото: Музей искусств Уолтерс, Балтимор, США).

Картина «Смерть Архимеда» работы Эдуарда Вимонта (1846 — 1930). Здесь автор придерживается версии, что последними его словами были: «Не трогай моих кругов!»

В то время среди геометров было немодным тратить время на изготовление машин любого вида. Греческий философ Платон (428-347 до н. э.) критиковал математиков Евдокса Книдского (408-355 до н. э.) и Архита Тарентского (430-360 до н. э.) за то, что они занимались постройкой разных механизмов, потому что считал унижением геометрии применять ее не к бесплотным умственным объектам, а к вещам осязаемого мира. Использовать геометрию по отношению к столь низким материям считалось грубостью, особенно изымать ее из сферы чистой философии с целью поставить на службу военному делу. Мы знаем из Плутарха, что Архимед не оставил ни одной записи о своих изобретениях, потому что сам полагал «сооружение машин занятием, не заслуживающим ни трудов, ни внимания; большинство их появилось на свет как бы попутно, в виде забав геометрии». А занимался он этим «лишь потому, что царь Гиерон из честолюбия убедил Архимеда хоть ненадолго отвлечь свое искусство от умозрений и, обратив его на вещи осязаемые и повседневные, таким образом сделать его более ясным и зримым для большинства людей[2 Перевод С. П. Маркиша.]». Страсть ученого к геометрии дошла до того, что он попросил своих

близких выбить на его надгробном памятнике вместо эпитафии изображение одной из своих лучших задач. Плутарх об этом говорил так:

«Он совершил множество замечательных открытий, но просил друзей и родственников поставить на его могиле лишь цилиндр с шаром внутри и надписать расчет соотношения их объемов».

До нашего времени надгробие Архимеда не дошло, хотя в I веке до н. э. его еще можно было увидеть; об этом рассказывает римский писатель Цицерон (106-43 до н. э.) в «Тускуланских беседах»\

«Когда я был квестором, я отыскал в Сиракузах его могилу, со всех сторон заросшую терновником, словно изгородью, потому что сиракузяне совсем забыли о ней, будто ее и нет. Я знал несколько стихов, сочиненных для его надгробного памятника, где упоминается, что на вершине его поставлены шар и цилиндр. И вот, осматривая местность близ Акрагантских ворот, где очень много гробниц и могил, я приметил маленькую колонну, чуть-чуть возвышавшуюся из зарослей, на которой были очертания шара и цилиндра... Посланные рабы расчистили место. Когда доступ к нему открылся, мы подошли к основанию памятника. Там была и надпись, но концы ее строчек стерлись от времени почти наполовину...»

Возможно, мы никогда не узнаем, как проводил свои дни Архимед, была ли какая-то реальная основа у многочисленных исторических анекдотов о нем и каких мнений он придерживался о своих смертоносных изобретениях. Однако то, что историческая память о реальных событиях имеет свойство стираться, не всегда плохо. Когда история превращается в «истории», не стоит считать это исключительно ее недостатком — подчас такое явление предоставляет нам и новые возможности. Все помнят еще со времен начальной школы о том, что Архимед как безумный бегал по улицам Сиракуз с криками «Эврика! Эврика!», радуясь открытию того, что сейчас известно как «закон Архимеда». Совершенно невероятно, чтобы данный анекдот, рассказанный в I в. до н. э. римским архитектором Витрувием в его книге «Обархитектуре», был правдой. И все- таки он помогает нам запомнить что-то большее, чем просто забавную сценку; благодаря ему мы лучше представляем себе личность Архимеда и его вклад в науку. Многие помнят и то, что это открытие помогло решить вопрос о золотой короне тирана Гиерона II, к чему мы еще

вернемся.

Среди всех работ, имеющих отношение к математике, вероятно, первое место должно принадлежать Архимеду с его открытиями, которые поражают дух и из-за своего изящества кажутся просто чудом.

Эванджелиста Торричелли

Научное наследие Архимеда

Тексты Архимеда дошли до нас преимущественно не на том языке, на котором они были написаны (дорийский диалект древнегреческого языка). Их перевели на классический греческий язык, на его византийский вариант и на арабский. Кроме того, большинство работ сиракузского гения, судя по всему, не сохранились, и уж тем более невозможно говорить о собственноручных записях Архимеда. По большей части его труды были посвящены математике, но он занимался и математической физикой (статикой и гидростатикой), а также использовал математику для решения прикладных задач.

Первые комментарии к работам Архимеда принадлежат Герону (10-70), Паппу (290-350) и Теону (335-405) — все они были александрийскими математиками. И тем не менее первое собрание сочинений Архимеда было выпущено только в VI веке. Заслуга его издания принадлежит греческому математику Евтокию, известному своими важными комментариями к работам «О шаре и цилиндре», «Об измерении круга» и «О равновесии плоских фигур». В том же веке византийский архитектор Исидор Милетский выпустил в свет первое издание этих трех книг с комментариями Евтокия, к которым со временем добавлялись и другие работы по мере их обнаружения вплоть до IX века. С той поры сложилось два пути, по которым неизвестные труды Архимеда попадали на Запад: через Византию и из арабского мира.

Если говорить об арабском наследии, то известностью пользовались переводы трудов Архимеда с греческого, сделанные Сабитом ибн Куррой (836-901).

ТРУДЫ АРХИМЕДА

В греческом варианте сохранились следующие работы.

1.О равновесии плоских фигур (2 книги).
2.О квадратуре параболы.
3. Метод механических теорем (известен как «Метод»).
4.О шаре и цилиндре (2 книги).
5.О спиралях.
6.О коноидах и сфероидах.
7. О плавающих телах (2 книги).
8. Об измерении круга.

9. Исчисление песчинок (Псаммит).

10. Задача о быках.

11. Стомахион (Loculus Archimedius).

Кроме того, до нас дошли в арабском переводе и сделанных с него латинских переводах некоторые работы, пересказанные или цитированные другими авторами, а также такие, чье авторство ставится под сомнение.

12.О правильных многогранниках. Пересказано и цитировано Пап пом.

13.О восьмиугольнике. Сохранилось в арабском переводе.

14.О помещаемом в жидкость (De iis quae in humido vehuntur). Арабский перевод утерян, но сохранился латинский перевод с него Вильгельма из Мербеке (1286).

15. Книга лемм (Liber assumptorum). Сохранилась в арабском переводе.

16.О треугольниках. Сохранилась в арабском переводе.

17.О параллельных прямых. Сохранилась в арабском переводе.

18.О свойствах прямоугольных треугольников. Сохранилась в арабском переводе. Возможно, она вместе с двумя предыдущими работами представляла собой единую книгу.

19.О клепсидрах. Сохранилась в арабском переводе.

20.О параболическом зажигательном зеркале (De speculo comburente concavitatis parabola). Цитируется у разных авторов. Утеряна.

21. Об основах геометрии.

22.О касающихся кругах.

23.О датах.

24. Книга о равновесии фигур при применении рычагов. Цитируется Героном. Утеряна.

25. Книга опор. Цитируется Героном. Утеряна.

26. О рычагах. Цитируется Героном. Утеряна.

27.О весах. Цитируется Героном. Утеряна.

28.О построении шаров. Цитируется Паппом. Утеряна.

29. Элементы механики.

На средневековом же Западе Архимед был неизвестен, пока фламандский переводчик Вильгельм из Мербеке (1215-1286) не опубликовал латинский перевод в 1269 году. Это и несколько последовавших за ним изданий привели к тому, что самые важные работы Архимеда в эпоху Возрождения на Западе уже были доступны. С другой стороны, трагическая смерть немецкого

астронома Йоганна Мюллера (Региомонтана) в 1476 году оборвала работу по подготовке к изданию некоторых трудов Архимеда, которое должно было обеспечить их беспрецедентную для той эпохи распространенность. И все-таки долго ждать не пришлось, потому что в 1544 году в Базеле было напечатано первое издание всех известных на то время латинских и древнегреческих текстов под редакцией Томаса Венатория. Вот таким образом в течение XV — XVI веков книги Архимеда вышли в Европе на первый план и послужили в дальнейшем одной из основ научной революции. Это сделало Архимеда «отцом матфизики», какое положение он, по мнению многих историков науки, продолжает занимать и поныне.

Первые переводы Архимеда на новые языки были сделаны с базельского издания: немецкий перевод Штурма (1670), двойной греко-латинский перевод Торелли (1792), немецкий перевод Ницце (1824) и французский Пейрара (1807). В более близкие к нам времена важнейшей работой стала компиляция и перевод Гейберга. В конце XIX века он опубликовал перевод всего известного к тому времени наследия Архимеда, основываясь на издании греческого текста XV века. В 1906 году, как мы уже говорили, он открыл так называемый константинопольский палимпсест, где обнаружил различные тексты, среди которых и трактат «О методе». Другие сборники и переводы, упоминаемые в любом исследовании, — это английский перевод Хита и голландская, а также английская версии Дейкстерхейса. Последние широко распространены, так как неоднократно переиздавались и переводились на многие языки — эта информация может быть интересной тем, кто хотел бы серьезнее углубиться в труды сиракузского ученого.

Архимед предвосхитил наше интегральное исчисление, как по времени, так и по надежности методов и гениальности использованных способов, которые не были превзойдены вплоть до XVII века.

Паоло Руффини, математик (1765—1822)

В текстах Архимеда можно сразу различить два стиля повествования: эпистолярный и научный. Мы уже упоминали о переписке ученого и о том, как благодаря ей стали известны некоторые подробности его жизни. Что же касается научного стиля, то его труды гораздо больше напоминают статьи, чем практически традиционные для того времени и в последующие века дидактические тексты. Здесь надо учитывать, что адресаты архимедовых трактатов были не учениками, а людьми с

обширными знаниями в области геометрии — можно сказать, равные отправителю.

Таким образом, очевидно, что описание всех открытий и исследований Архимеда могло бы занять много томов.

В данной книге рассматриваются только некоторые из его достижений: одну главу мы посвятили работам в сфере математической физики, другую — его чисто математическим занятиям, а третью — изобретениям, которые приписываются Архимеду.

Константинопольский палимпсест

То, каким образом датский филолог Йохан Людвиг Гейберг (1854-1928) обнаружил сборник трудов Архимеда, достойно стать сценарием приключенческого фильма. Он слышал рассказы о средневековом палимпсесте, и в 1906 году после длительного расследования ему удалось его отыскать. Палимпсест — это документ, где более поздний текст нанесен поверх древнего, античного. В данном случае· речь идет о пергаментной книге из козьей шкуры, известной как Константинопольский палимпсест. По-видимому, некоторые православные монахи XIII века записывали свои богослужебные тексты на документах X века, и среди них было несколько трудов Архимеда и его письмо к Эратосфену К счастью, переписчик не уничтожил написанное ранее, а просто помыл пергамент, после чего записал на нем религиозные тексты. Гейберг провел большую работу с использованием фотографической техники: он переписал тексты Архимеда букву за буквой, распознал рисунки и расположил страницы так, как они были сшиты изначально. Палимпсест содержал семь трактатов: единственную на тот момент известную копию книги «О плавающих телах», а также «Метод механических теорем», «Стомахион», «О равновесии плоских фигур», «О спиралях», «Об измерении круга» и «О шаре и цилиндре».

Из всего найденного самым ценным являлся трактат «Метод механических теорем», или просто «Метод», который кардинально изменил сложившееся к тому времени мнение, что Архимед скрывал свои методологические инструменты. Более того, следует особо отметить тот факт, что «Метод» посвящен Эратосфену, о чем свидетельствует сохранившееся письмо. То есть Архимед желал поделиться своей методологией с тем, кого он считал самым блестящим математиком своего времени и, следовательно, со всем остальным современным ему научным сообществом.

В 1920 году палимпсест перешел в собственность частного лица, а в 1998 году был выставлен на аукцион. Хотя греческому правительству удалось собрать на его покупку почти 1,9 млн долларов, его приобрел неизвестный покупатель за 2,2 млн долларов. Анонимный коллекционер, известный как «мистер Б.», затем подарил палимпсест Художественному музею Уолтерса в Балтиморе, США.

ГЛАВА 2
Эврика!

Родоначальником европейской науки считается математик Фалес из Милета: он часто упоминается как первый из философов, о котором сохранились исторические свидетельства. Через несколько веков после него возникло само понятие физики, причем особую роль в этом сыграл Аристотель. И все-таки у истоков того, что в наше время понимается под «физикой», стоит величественная фигура Архимеда.

Именно он, в сущности, первым применил математические и геометрические принципы, чтобы объяснить строение материального мира.

Имя Архимеда вошло в популярную культуру в связи с его исследованиями законов плавучести тел и рычага. Несложно вспомнить закон Архимеда из-за известной истории про сиракузского тирана Гиерона II и сразу возникающей в уме картинки с нагим ученым, кричащим: «Эврика!» А закон рычага, в свою очередь, ассоциируется со знаменитым утверждением, приписываемым Архимеду: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!»

В этой главе мы не только поближе познакомимся с некоторыми научными принципами, но и узнаем, правдивы истории об Архимеде или они являются мифами. Интересно, что хотя Архимед и оставил серьезный след в физической науке, она не была главной сферой его исследований и областью интересов. А с его подходом к исследованиям — в целом таким же, какой господствует в современной физике, — и использованием математического аппарата он стал первым в истории матфизиком в точном смысле этого слова. Ученый открыл новый способ исследования природы, непохожий на спекулятивные рассуждения, но основанный на научном подходе. Греческий математический мир излишне переоценивал дедуктивный метод, и Архимед полностью отказался от такой системы работы. Сиракузский мудрец сумел применить в своих исследованиях индукцию, основанную на опыте, и совместить ее с дедукцией.

Именно он изобрел научный метод, базирующийся на этих принципах. Скажем, работа с рычагом привела его к математическим результатам, которые мы рассмотрим в следующей главе. И если первый физический закон, сформулированный в Древней Греции, касался числовых соотношений между длиной струны и высотой звука, то второй из

задокументированных физических законов был открыт через 300 лет после первого, и это был как раз закон рычага Архимеда. Так что он был первым математиком, который привлек современную ему геометрию к изучению физических явлений. Проведенное им исследование основывалось на том, что сегодня бы назвали интуитивной физикой, то есть близкой экспериментатору, имеющей дело с повседневными явлениями жизни — тем, с чем любой из нас встречается каждый день. Он реализовал блестящую идею — использовать принцип ceteris paribus, что с латыни переводится как «при равенстве всех прочих обстоятельств». Иными словами, Архимед заметил, что для изучения любой физической величины надо сфокусироваться исключительно на этой самой величине, упростив условие задачи с помощью предположения, что остальные величины на нее не влияют, то есть допустить, что они представляют собой константы. Для реализации данного метода ученый впервые в истории воспользовался представлением физических объектов как математических: например, рычаг в таком представлении стал балкой, не имеющей массы, а физические тела — идеальными геометрическими фигурами. Ну и, наконец, он не только, как известно, проявлял интерес к рычагам и плавающим телам, но и написал книгу «Исчисление песчинок», в которой отразился его интерес к астрономии. Кроме того, среди трудов Архимеда была и полностью утерянная к нашему времени работа «Катоптрика», где он рассуждал о свете. Мы еще вернемся к ней в последней главе, когда речь пойдет о некоторых из изобретенных им механизмов.

Известно, что греческий философ Аристотель написал несколько книг, посвященных физике, и среди них особняком стоит та, которая собственно и называется «Физикой». Этот термин пришел к нам из древнегреческого языка и означает «природа», ведь физика изучает природные явления. И хотя Аристотель внес значительный вклад в другие области науки, однако именно в физике его деятельность не способствовала прогрессу; а так как в Средние века почтение к нему было столь высоко, что все его доводы воспринимались без всякой критики, то можно сказать, что его работа в данной области даже вызвала регресс. В целом это было действительно проблемой для научного сообщества вплоть до XV — XVI веков: никто не осмеливался оспаривать идеи философа из Стагиры. Ситуация стала меняться только во время научной революции, когда люди вроде Галилео Галилея выдвинули более соответствующую действительности концепцию движения; а другие, такие как Исаак Ньютон, собрав воедино результаты многих исследований,

показали, что на небе и на Земле все подчиняется одним и тем же законам природы.

Мы можем взять совершенные доказательства из книг Архимеда, нас не пугает сложность их чтения.

Кеплер (1571-1630), астроном и математик

У Архимеда можно было бы найти идеи, которые помогли бы справиться с влиянием аристотелевой физики, но он сам был на долгие века забыт. С легкой руки Аристотеля стали модными концепции тяжести и легкости: первое — это то, что испытывают тела, падающие на землю, а второе — плавающие в воздухе. Архимед же опроверг его теорию и ввел в своих работах понятие удельного веса, или плотности, важное для описания поведения плавающих тел. Согласно его концепции тело плавает, потому что его плотность меньше плотности среды.

В то же время он явно отказался от аристотелевской идеи, согласно которой пустоты не существует.

Из принципа плавания тел Архимеда можно было вывести, что плотные тела, имеющие больший объем при той же массе, содержат больше пустоты между составляющими их частицами. Это вполне согласовывалось с атомизмом Левкиппа и Демокрита, который существовал уже пару веков и послужил основой для многих абстрактных рассуждений. Но очевидная разница в том, что Архимед не оставил после себя ни одной строки, посвященной рискованным предположениям, напротив, он раз за разом использовал математику, чтобы доказать и поддержать свои утверждения, и это резко выделяет его из ряда греческих философов той поры.

Закон Архимеда и корона тирана Гиерона

Перед тем как поговорить о законе Архимеда, мы обратимся к истории, которую обычно вспоминают, когда речь заходит об этом открытии. После этого сформулируем данный закон. В конце мы приведем некоторые комментарии к трактату, где Архимед описал свои идеи о плавании тел.

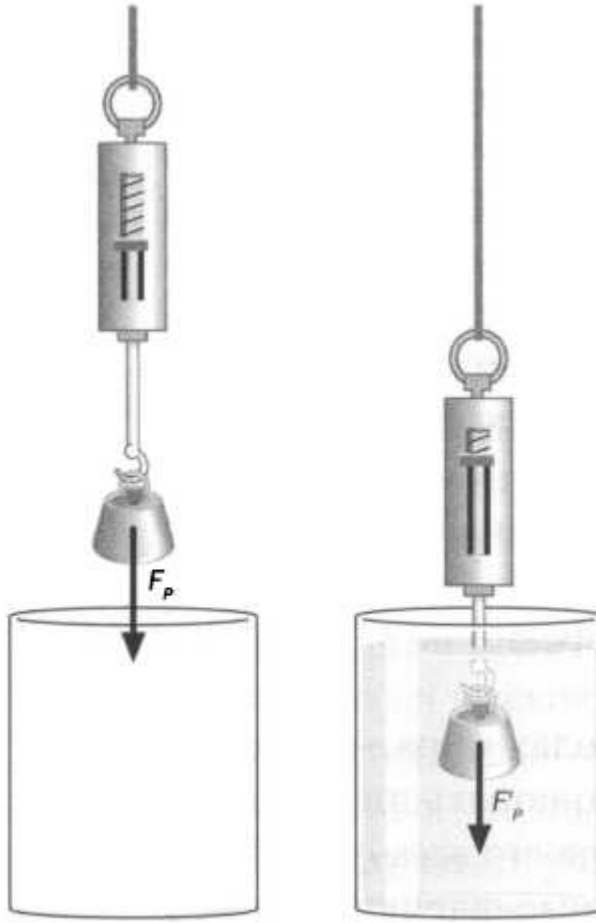
Гиерон, тиран Сиракуз и родственник Архимеда, заказал некоему мастеру корону из золота, для покупки которого он выдал ему необходимую сумму. Однако, когда он получил заказанный головной убор, у него зародилось подозрение, что ювелир использовал не чистое золото, а его сплав с серебром, чтобы присвоить остаток. Именно тогда у тирана возникла счастливая мысль пригласить Архимеда, поделиться с ним подозрениями и выяснить, не могут ли его знания помочь разрешить эту проблему. Мудрец не ответил сразу, но пообещал подумать над задачей и попробовать найти способ ее решения. Однажды, принимая ванну в одной из городских бань, Архимед увидел, что при погружении в нее вода вылилась через край, и понял, как он может решить загадку короны. Радость его была такова, что он выскочил из ванны и побежал нагим по улицам Сиракуз, восклицая: «Эврика! Эврика!», что значило «Я нашел! Я нашел!» То, что он нашел, известно теперь как закон Архимеда. В результате ученый доказал, что ювелир пытался обмануть тирана. А в наши дни выражение «эврика» используется, когда говорится о внезапно найденном решении важной проблемы.

В действительности маловероятно, чтобы Архимед бегал по городу в таком виде, да еще крича, как безумный. И все- таки эта легенда, должно быть, основана на каких-то реальных фактах, ведь ее в деталях передают различные историографы. Самым ранним свидетельством мы обязаны римскому архитектору Витрувию, и здесь стоит привести наиболее важную его часть, взятую из трактата «Десять книг об архитектуре»:

«Что же до Архимеда, то из всех его многочисленных и замечательных открытий приводимое мною является, несомненно, доказательством прямо-таки безграничной его изобретательности. А именно, когда Гиерон, достигший царской власти в Сиракузах, после удачного завершения своих предприятий решил по обету бессмертным богам поместить в одном из храмов золотую корону, он заказал сделать ее за определенную плату и отвесил нужное количество золота подрядчику. В назначенный по договору срок тот доставил царю тонко исполненную работу, в

точности, видимо, соответствовавшую весу отпущенного на нее золота. После же того как сделан был донос, что часть золота была утаена и при изготовлении короны в нее было примешано такое же количество серебра, Гиерон, негодуя на нанесенное ему оскорбление и не находя способа доказать эту покражу, обратился к Архимеду с просьбой взять на себя разрешение этого вопроса. Случилось так, что в то время как Архимед над этим думал, он пошел в баню и, садясь в ванну, заметил, что чем глубже он погружается в нее своим телом, тем больше через край вытекает воды. И как только это указало ему способ разрешения его вопроса, он немедля, вне себя от радости, выскочил из ванны и голый бросился к себе домой, громко крича, что нашел то, что искал; ибо на бегу он то и дело восклицал по-гречески: «Эврика! Эврика!»

Закон Архимеда изучают во всех школах мира — это один из физических постулатов, которые легко понять интуитивно. Любой человек испытывал уменьшение своего веса при погружении в бассейн, видел летящие воздушные шарики, смотрел на лодки, плавающие по морю, помнит кадры с подводными лодками, спускающимися в океанские глубины. Это только немногие примеры, в основе которых лежит закон Архимеда. Но в его эпоху многие понятия были еще неизвестны или только исследовались. Так, ему пришлось вводить понятие удельного веса (плотности), чтобы иметь возможность объяснить явление плавучести. Тем не менее он ничего не знал о понятии силы, которое в наши дни используется для изучения закона Архимеда, носящего теперь еще одно название: закон гидростатики. Есть много способов его формулировки, один из самых распространенных: «На всякое тело, полностью или частично погруженное в воду или иную жидкость, вертикально вверх действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом». Используя современную терминологию, выталкивающая сила и вес — это две силы, и надо было ждать времен Ньютона, чтобы получить серьезное и точное математическое описание этих величин. Однако закон Архимеда можно трактовать и с помощью геометрических инструментов или пользуясь понятием плотности.



Вес тела в воздухе всегда больше его веса в жидкости. Кажущийся вес в жидкости будет равен реальному весу минус выталкивающая сила. Так что способ вычислить выталкивающую силу F_e, которой подвергается тело,состоит в том, чтобы измерить его вес в воздухе F_p, затем в жидкости F'_p и вычесть одно из другого: $F_e = F_p - F'_p$.

Архимед знал, что тело, погружаясь в воду (здесь и далее под водой понимается любая среда, будь то жидкость или газ), должно вытеснить равное объему погруженного тела количество воды. Вот почему рассказ о ванной служит хорошей иллюстрацией для закона гидростатики: если поместить тело в ванну, полную воды, часть жидкости выльется, то есть отправной пункт такой: $V_{\text{погруженной}}$ части $= V_{\text{вытесненной воды}}$

С точки зрения приложения сил получается, что вода (или другая среда) действует выталкивающей силой на погруженное

тело (см. рисунок на стр. 42). То есть сила F_E по модулю равна весу F_P вытесненной воды. Это значит $F_E = F_{P(воды)}$. Вес (сила действия тела на опору или подвес) вытесненной воды равен произведению ее массы на земное ускорение (значение которого у поверхности земли составляет примерно 9,8 м/с^2): $F_{P(воды)} = m_{воды} \cdot g$. Добавив математическую формулу расчета плотности, то есть $d_{воды} = m_{воды}/V_{воды}$, можно резюмировать: $F_{P(воды)} = V_{воды} \cdot d_{воды} \cdot g$. Мы уже говорили, что объем вытесненной воды равен объему погруженной части тела, из чего выводится $F_{P(воды)} = V_{тела} \cdot d_{воды} \cdot g$. Наконец, опустив нижние индексы, поскольку вес вытесненной воды равен выталкивающей силе, действующей на тело, мы можем сформулировать закон гидростатики с помощью уравнения $F_E = V \cdot d \cdot g$, где F_E — это выталкивающая сила, которую испытывает тело, измеряющаяся в ньютонах (Н, данная единица измерения названа в честь Ньютона); V — объем погруженной части тела, измеряемый в м^3; d — плотность среды, измеряемая в кг/м^3; а g — ускорение свободного падения.

От мифа к реальности

Как это бывает с любой легендой, история короны тирана Гиерона — отчасти правда, а отчасти миф. Можно утверждать, что элемент выдумки есть даже в самом методе, приписываемом Архимеду, с помощью которого он раскрыл обман хитрого ювелира.

Конечно, Архимед мог вывести ремесленника на чистую воду, но с помощью другого, более сложного метода, использовав для этого не только закон гидростатики, но и закон рычага. Посмотрим описание данного открытия, сделанное Марком Витрувием:

«Тогда, исходя из этого открытия, он, говорят, сделал два слитка одинакового веса с короной — один из золота, другой из серебра. Сделав это, он взял объемистый сосуд, наполнил его до самых краев водой и опустил в него серебряный слиток, при погружении которого вода вытекла в количестве, равном величине слитка. Вынув затем слиток, он долил воды, отмерив ее секстарием, так, чтобы она опять сравнялась с краями, как и раньше. Так он определил, что серебро по весу соответствует известному количеству воды. Проделав этот опыт, он подобным же образом опустил в наполненный сосуд золотой слиток и, вынув его, нашел посредством прежнего измерения, что воды убавилось не столько же, а меньше, насколько меньше был объем золотого

слитка сравнительно с равным ему по весу серебряным. После же этого, вновь наполнив сосуд и опустив в то же количество воды саму корону, он нашел, что воды вытекло больше, чем при погружении золотого слитка такого же веса; и таким образом, исходя из того, что корона вытеснила больше воды, чем слиток, он показал примесь в золоте серебра и обнаружил покражу подрядчика».

Хотя метод теоретически совершенно правильный, заметим, что вряд ли Архимед пользовался именно таким способом, как описано выше. Сложность состоит в измерении объемов. Сначала для лучшего понимания проблемы упорядочим шаги, описанные Витрувием.

1. Архимед взял два куска материала, про весу идентичные короне, — кусок серебра (m_p) и золота (mo).

2. Затем он погрузил серебро в определенное количество воды, из-за чего вылился некоторый ее объем V_p, который ученый измерил.

3. Потом он погрузил золото в такое же количество воды, отчего вылился объем Vo жидкости, который он также измерил.

4. Архимед обнаружил, что V_p больше, чем V_o.

5. Наконец, он опустил настоящую корону в то же количество воды, и она вытеснила объем V_o этой воды, который он тоже измерил.

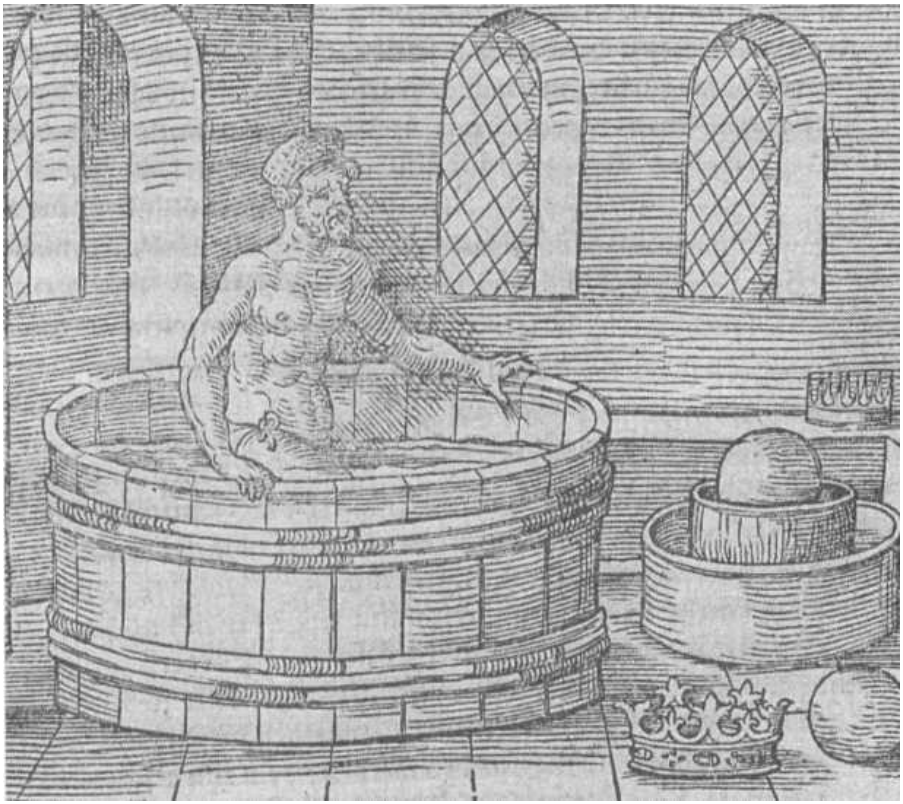
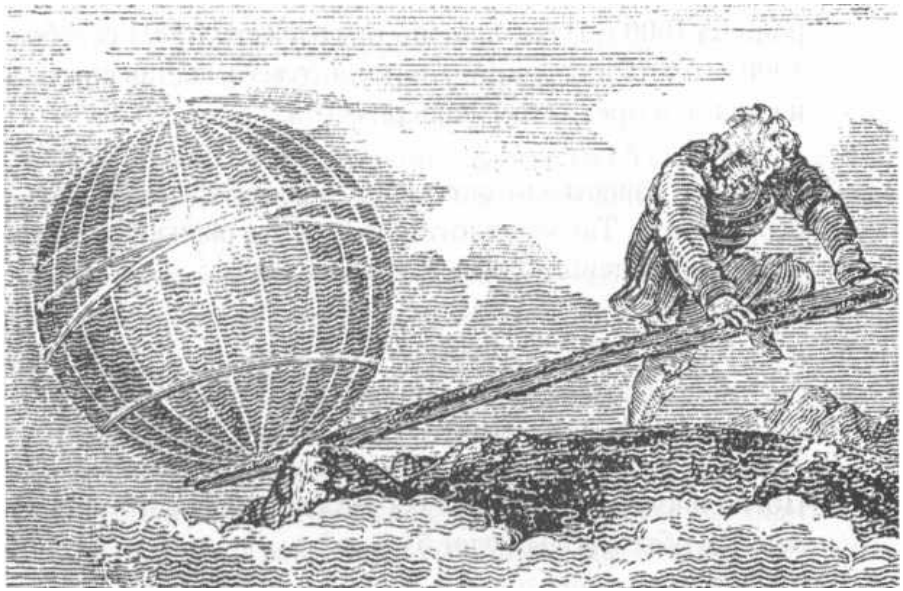


Иллюстрация к легенде, согласно которой Архимед нашел решение задачи с короной Гиерона,когда находился в общественной бане. 1575 год.



Среди фраз, которые приписывают Архимеду, самая известная — «Дайте мне точку опоры,и я переверну Землю». Ее цитирует

Папп Александрийский в VIII книге «Математического собрания». Рисунок воспроизводит гравюру из берлинского издания Фридриха Отто Хулча 1878 года.

6. Ученый выяснил, что объем V, вытесненный короной, больше, чем объем воды, вытесненной золотом, и меньше, чем объем, вытесненный серебром ($V_p > V_c > V_o$). Это доказало, что в короне была примесь серебра, то есть она состояла не из одного золота.

Теперь давайте воспроизведем этот опыт на наиболее правдоподобном примере, исходя из реальных данных, которыми мы располагаем, и следуя изложенному выше алгоритму, чтобы выявить, если необходимо, противоречия. Мы помним, что, как было отмечено ранее, любой погруженный в воду предмет вытесняет количество воды, равное его объему. Объем предмета можно вычислить исходя из его плотности и массы по известной формуле: $d = m/V$.

1. Чтобы не мелочиться, возьмем в качестве примера самую большую из сохранившихся золотых корон эпохи Архимеда. Речь идет о «венце из Вергины» (город в нынешней греческой Центральной Македонии), датированном IV веком до н. э. Этот венец имеет массу 714 г и диаметр 18,5 см. Учитывая, что некоторые из его листьев утеряны, и для облегчения расчетов примем массу короны за 1000 г. Итак, для опыта у нас есть 1000 г серебра, 1000 г золота и корона аналогичного веса, состав которой и является предметом эксперимента.

2. Теперь, в качестве второго шага, мы опускаем 1000 г серебра в воду. Так как плотность серебра равна 10,5 г/см^3, объем вытесненной воды будет 95,2 см^3:

$$V_p = \frac{m_p}{d_p} = \frac{1000\ \text{г}}{10{,}5\ \text{г/см}^3} = 95{,}2\ \text{см}^3.$$

3. Третьим шагом будет погружение в воду 1000 г золота. Поскольку его плотность составляет 19,3 г/см^3, вытесненный объем воды будет 51,8 см^3:

$$V_o = \frac{m_o}{d_o} = \frac{1000\ \text{г}}{19{,}3\ \text{г/см}^3} = 51{,}8\ \text{см}^3.$$

4. Объем воды, вытесненной 1000 г серебра, больше, чем объем воды, вытесненной 1000 г золота, так как плотность серебра меньше, и та же его масса занимает больше места.

5. Наконец, в воду опускается корона, и замеряется количество вытесненной ею воды. Тут надо сделать еще одно добавление. Предположим, что к золоту короны примешано 30 % серебра.

6. После погружения короны в воду можно заметить, что она вытесняет большее количество воды по сравнению с золотом и меньшее — по сравнению с серебром. Согласно нашему предположению, 30% от 1000 г короны составляет серебро и 70 % — золото:

$$V_c = 30\% \cdot V_p + 70\% V_p =$$

$$= \frac{30 \cdot 95{,}2\ \text{см}^3}{100} + \frac{70 \cdot 51{,}8\ \text{см}^3}{100} = 64{,}8\ \text{см}^3.$$

Объем воды, вытесненной короной (64,8 $см^3$), больше, чем вытесненной золотом (51,8 $см^3$), что могло бы доказать обман ювелира.

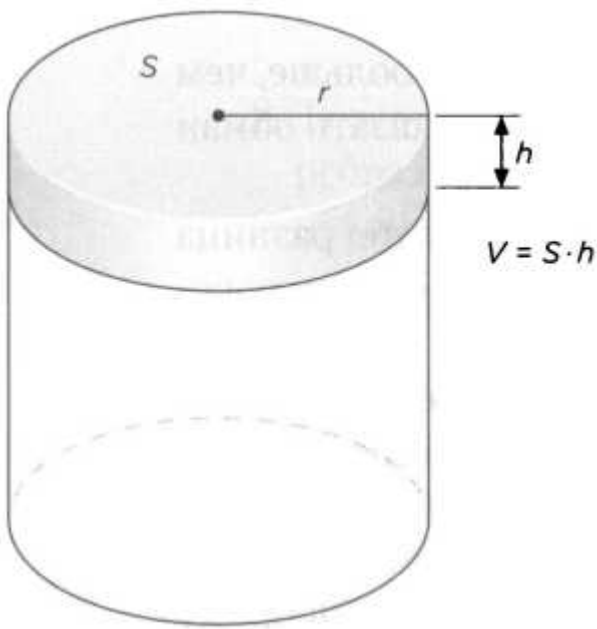
Но как измерить столь малые объемы? Заметьте: разница составляет всего 13 $см^3$, что примерно равно объему пары орехов.

В истории предлагались разные методы измерения, рассмотрим два из них — измерить уровень оставшейся в сосуде воды или собрать вытесненную воду в другой сосуд. Первый вариант, по-видимому, невероятен для той эпохи и выглядит приемом, далеким от возможностей Архимеда. Согласно первому способу, после погружения короны и других металлов в сосуд вода поднимется на некоторую высоту. Если сосуд цилиндрический (см. рисунок), то и поднимающаяся вода имеет форму цилиндра. Предположим, диаметр сосуда равен 20 см, тогда поверхность воды имеет площадь 314 $см^2$. С этими данными мы можем вычислить высоту (А), на которую поднимется вода в каждом из случаев:

$$h_p = \frac{V_p}{S} = \frac{95{,}2\ \text{см}^3}{314\ \text{см}^2} = 0{,}30\ \text{см} = 3{,}0\ \text{мм}$$

$$h_o = \frac{V_o}{S} = \frac{51{,}8\ \text{см}^3}{314\ \text{см}^2} = 0{,}170\ \text{см} = 1{,}7\ \text{мм}$$

$$h_c = \frac{V_c}{S} = \frac{64{,}8\ \text{см}^3}{314\ \text{см}^2} = 0{,}21\ \text{см} = 2{,}1\ \text{мм}.$$



Объем цилиндра высчитывается умножением площади его основания на высоту.

Это означает, что разница в уровнях между короной из золота и короной из сплава составит (h_o - h_o = 0,4 мм), то есть меньше чем полмиллиметра! Напомним, что представленные расчеты приблизительны, но в любом случае от перемены изначальных допущений разница в результатах изменилась бы очень мало. Кроме того, допущения были сделаны таким образом, чтобы

получить самые поддающиеся измерению величины. Возможно ли, чтобы Архимед смог измерить эту разницу? Вряд ли, ведь столь малая величина еще и сочетается с мениском, искривлением поверхности жидкости в сосуде из-за взаимодействия со стенками данного сосуда.

Итак, отвергнув первый вариант, некоторые ученые решили, что Архимед собирал вытесненную воду в отдельный сосуд, то есть приняли вариант Витрувия. Для этого он, вероятно, использовал водяные часы — клепсидру, то есть простой резервуар с небольшим отверстием, через которое вытекает вода. Эта гипотеза подкреплялась и тем фактом, что подобный инструмент измерения времени был широко распространен еще со времен Древнего Египта. Ведь и грек Ктесибий изобрел свои усовершенствованные водяные часы во времена Архимеда. Для использования метода клепсидры необходимо выполнить следующие шаги.

Шаг 1. Отверстие закрывается, и резервуар наполняется водой так, чтобы при опускании в него тела вода не перелилась через край.

Шаг 2. В резервуар погружается золотой слиток, по весу равный короне.

Шаг 3. Отверстие открывается, и вода вытекает через него, пока не перестанет течь.

Шаг 4. Слиток вынимается, и отверстие закрывается.

Шаг 5. В резервуар погружается корона.

Шаг 6. Отверстие открывается. Если вода вытекает из него, это значит, что корона по объему больше золотого слитка, то есть изготовлена из сплава и содержит другое вещество. Если вода доходит только до уровня отверстия, значит корона золотая.

Опытным путем доказано, что таким способом можно измерить разницу в 10 $см^3$ — это и есть примерно тот объем, о котором идет речь. В любом случае в рассказе Витрувия ничего не говорится об использованных Архимедом средствах, а значит, у нас нет доказательств того, что он воспользовался именно таким методом. Тем не менее применение обоих упомянутых способов (замер высоты воды и клепсидра) вполне можно себе представить в эпоху Архимеда. Но любой исследователь в своей работе старается опираться на тексты самого математика, а не только на вторичные источники, как в случае с Витрувием или последующей литературой. Поэтому утверждение, что приведенные римским архитектором сведения могут быть и неверными, вовсе не означает презрения к таланту Архимеда; как раз наоборот, поскольку можно сделать предположение, что его гений пошел еще дальше. Ведь мы упоминали о его трудах,

посвященных рычагу. Почему бы ему не использовать данный принцип и для решения задачи с короной? Давайте рассмотрим предположение, которое выдвигают многие специалисты. Как мы показали предыдущими расчетами, 1000 г чистого золота и корона весом 1000 г вытесняют разное по объему количество воды, а значит, разное и по массе. Мог ли Архимед измерить разницу в количестве воды в 13 г? Да, мог, но не измерением уровня воды и не методом клепсидры. Он мог бы измерить ее с помощью равноплечих весов, которые ученый применял на протяжении всей жизни.

КТЕСИБИЙ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ И КЛЕПСИДРА

Ктесибий из Александрии (285-222 до н. э.) в наше время считается отцом пневматики, так как он написал первый научный трактат о сжатом воздухе и использовании пневматических насосов. Список приписываемых ему изобретений и открытий включает в себя водяной орган, научное обоснование сифона и клепсидру: то есть он создал отличающиеся невиданной по тем временам точностью водяные часы, работа которых была основана на вытекавшей в специальное отверстие воде.

Реконструкция клепсидры конца V века до н. э. (фото: Marsyas).

В целом идея такова: если с двух сторон равноплечих весов разместить килограммовый слиток золота и килограммовую же корону, то весы, естественно, останутся в равновесии (рисунок 1).

Но если те же предметы будут при этом погружены в воду, весы больше не будут в равновесии, так как их вес в воде окажется разным (рисунок 2). Почему? Потому что согласно закону гидростатики выталкивающая сила, действующая на тело, равна весу вытесненной воды, который будет разным у двух предметов с разными объемами. То есть предмет с большим объемом (корона) в воде станет легче, чем предмет с меньшим объемом (слиток), так что весы наклонятся в сторону золотого слитка.

И такая процедура представляется вполне возможной для Архимеда, учитывая список его работ. Нужны были только жидкая среда и весы с достаточной чувствительностью, чтобы реагировать на разницу в несколько граммов, а все это в его распоряжении было. В самом деле, такие ученые, как Галилей, продемонстрировали, что данный метод работает.

РИС. 1

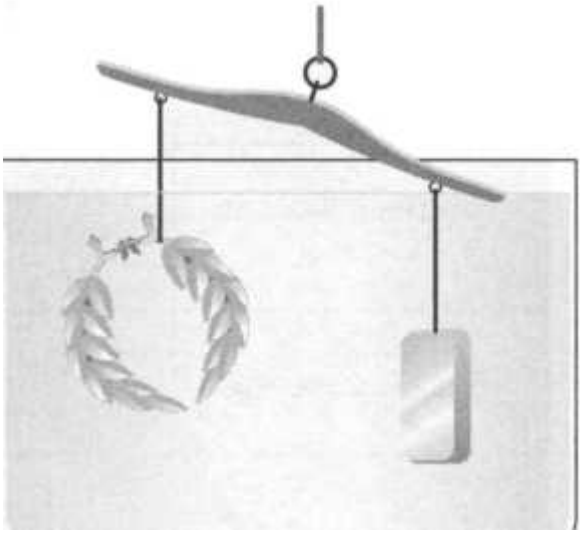


РИС. 2

Что и как плавает

Тело будет плавать на поверхности жидкости, если его плотность меньше плотности жидкости; станет тонуть, если его плотность выше; и останется висеть в равновесии, если их плотности равны. Это всем известное правило, впервые сформулированное Архимедом, можно продемонстрировать с помощью динамических процессов, сравнив выталкивающую силу среды и вес объекта, помещенного в нее. Если читатель в какой-то момент запутается, он может просто пропустить следующие строки, написанные только для того, чтобы изложить идеи Архимеда современным языком.

ВОДЯНОЙ ГИГАНТ

С водой связана интересная аномалия, из-за которой, собственно, и возможно существование океанов и в целом жизнь на Земле: в твердом состоянии ее плотность меньше, чем в жидком. Это значит, что лед может плавать на поверхности воды. Так происходит, к примеру, с айсбергами. Слово «айсберг» пришло из голландского языка через английский и означает «ледяная гора». Речь идет о гигантских кусках замерзшей пресной воды, дрейфующих в океане и

постепенно опускающихся к низким широтам, куда их влекут течения. Значительная часть айсберга погружена в воду. При этом вес айсберга (P) равен выталкивающей силе воды (E), в которую он погружен и которая равна весу воды, вытесненной погруженной частью айсберга. Объем этой воды обозначим как (V_s).

Сила Выталкивающая сила: E	Объем Объем погруженной части: V_s	Плотность Морской воды: d_a	Формула $E = V_s \cdot d_a \cdot g$
Вес айсберга: P	Объем всего айсберга: V_c	Льда: d_l	$P = V_c \cdot d_l \cdot g$

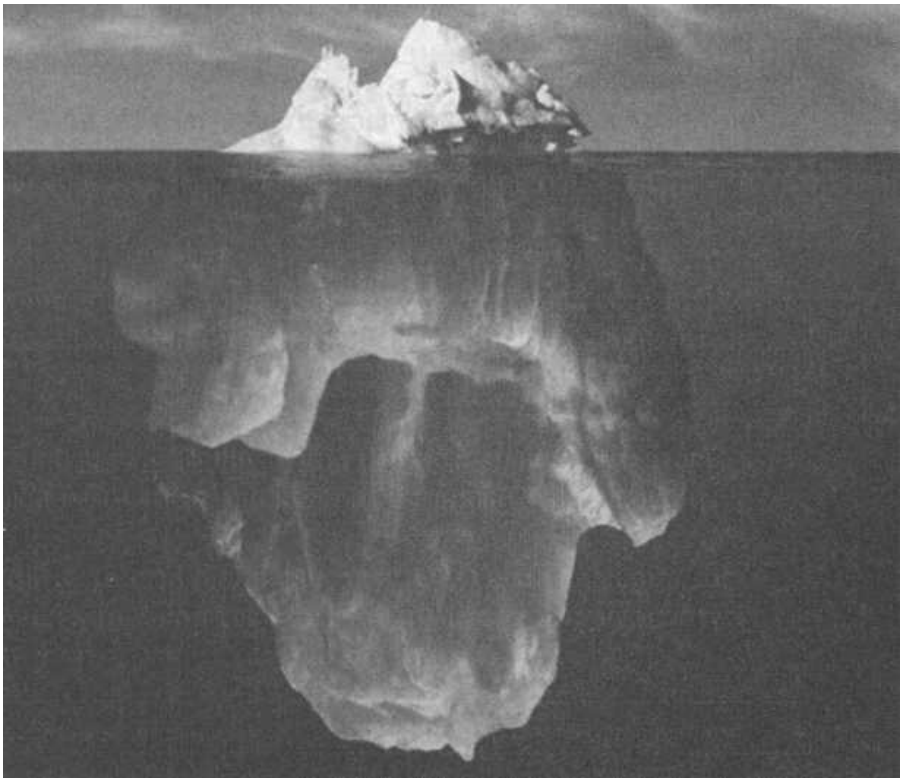
Действующая на айсберг выталкивающая сила равна $E = V_s \cdot d_a \cdot g$, где d_a — плотность соленой воды. С другой стороны, вес всего айсберга равен $P = V_c \cdot d_l \cdot g$, где d_l — плотность айсберга, а V_c — объем всего айсберга. Чтобы узнать соотношение видимой и подводной частей айсберга, достаточно вычислить отношение V_s/V_c. Нужно просто разделить выталкивающую силу на вес, учитывая, что они равны ($E = P$), так как айсберг находится в равновесии.

$$\frac{E}{P} = \frac{V_S \cdot d_a \cdot g}{V_C \cdot d_l \cdot g} = \frac{V_S \cdot d_a}{V_C \cdot d_l} \rightarrow \frac{V_S}{V_C} = \frac{E \cdot d_l}{P \cdot d_a} \rightarrow \frac{V_S}{V_C} = \frac{d_l}{d_a}.$$

Надо отметить, что соотношение между погруженной частью айсберга и всем его объемом будет равно соотношению плотности айсберга и плотности воды, в которой он плавает. Плотность айсберга (то есть пресной воды в твердом состоянии) равна 0,92 г/см^3, а плотность морской воды может различаться (зависит от ее температуры и степени солености), так что возьмем ее среднее значение: 1,03 г/см^3.

Доля объема подводной части = 0,92/1,03 • 100 = 89,3 %.

Таким образом, подводная часть айсберга составляет почти 90 % от его объема.



Айсберги существуют благодаря тому, что вода в твердом состоянии имеет меньшую плотность, чем вода океанов. Если было бы иначе, то лед скапливался бы на дне.

Здесь будут приведены математические выкладки, базирующиеся на следующих величинах:

m_c — масса тела;

m_a — масса вытесненной воды (или другой среды);

d — плотность тела;

d_a — плотность воды;

V — объем погруженной части тела и вытесненной воды.

Тело тонет

Вес тела в воздухе больше выталкивающей силы:

$F_p > F_E \rightarrow m_c \cdot g > V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c > V \cdot d_a \rightarrow d_c > d_a$.

Тело погружается, если его плотность больше плотности воды.

Тело плавает на поверхности

Вес тела в воздухе меньше выталкивающей силы:

$Fp < F_E \rightarrow m_c \cdot g < V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c < V \cdot d_a \rightarrow d_c < d_a$.

Тело плавает, если его плотность меньше плотности воды.

Равновесие

Вес тела в воздухе равен выталкивающей силе:

$Fp = F_E \rightarrow m_c \cdot g = V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c = V \cdot d_a \rightarrow d_c = d_a$.

Тело пребывает в положении равновесия, если его плотность равна плотности воды.

О плавающих телах

Основную часть своих идей о законе гидростатики Архимед изложил в трактате «О плавающих телах» — единственном труде на данную тему, который сохранился до наших дней. Возможно, это самая известная из книг Архимеда и, без сомнения, лучшее свидетельство его гениальности. Хотя во всех книгах ученого присутствует дедуктивный метод, видно, что он постоянно обращается к физической реальности, предвосхищая таким образом за 2000 лет научный экспериментальный метод, который станет развиваться лишь в XVI — XVII веках.

Именно осмысление и освоение наследия Архимеда заложило базу научной революции XVII века.

Александр Койре (1892—1964), историк науки

Трактат состоит из двух книг. Первая открывается краткой преамбулой, за которой следуют девять утверждений, а вторая содержит десять утверждений. В первой книге объясняется закон равновесия жидкостей и показывается, что вода принимает форму шара вокруг центра тяжести. Под таким центром Архимед понимает центр Земли. Он был согласен с Эратосфеном, что Земля имеет сферическую форму. Впервые в истории науки в данном трактате излагается концепция удельного веса и плотности, хотя сам оригинальный текст не содержит специальной терминологии для этих понятий. Далее разбираются три возможных положения тела в жидкости в зависимости от соотношения их плотностей: плотность тела равна плотности жидкости (утверждение 3), плотность тела меньше плотности жидкости (утверждения 4 и 6) и плотность тела больше плотности жидкости (утверждение 7). То, что сегодня известно как закон Архимеда, или закон гидростатики, формулируется в утверждениях 6 и 7. Во второй книге рассматриваются вопросы равновесия помещенных в жидкость параболоидов. Следует учитывать, что Архимед жил в Сиракузах, где главной частью города был торговый и военный порт, так что иногда его вдохновляли формы корпусов кораблей, которые он пытался моделировать с помощью известных ему геометрических фигур.

Как мы уже говорили раньше, первая книга открывается преамбулой, где выдвигается предположение, что жидкость сдавливается в вертикальном направлении той жидкостью, которая находится сверху. Эта гипотеза верна и получила подтверждение законом всемирного тяготения Ньютона, так как сама жидкость имеет вес и испытывает силу давления от той части жидкости, которая выше.

ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВВЕРХ И ВНИЗ В ЖИДКОСТИ

Многие рыбы обладают органом, который называется плавательным пузырем: он дает им возможность по своему усмотрению регулировать собственную плотность, чтобы подниматься или опускаться в толще воды, не двигая ни одним внешним мускулом. Механизм его действия основан на регулировании содержания газа в крови для поднятия вверх, ведь рыбы могут высвобождать кислород и углекислый газ, находящиеся в кровяном потоке. Часто в музеях и на научных выставках можно увидеть простую конструкцию, иллюстрирующую принцип работы этого замечательного продукта эволюции: бутылку с трубкой (рисунок 1). В бутылку может свободно проникать вода и выходить из нее. Внутрь нее вставлен воздушный шарик, к которому подведена трубка для подачи воздуха. Вся конструкция помещена в сосуд с водой, и когда шарик наполняется воздухом, общая плотность всей системы уменьшается, и бутылка всплывает. Когда воздух из шарика выходит, вода занимает освободившееся пространство, общая плотность всей конструкции увеличивается, и бутылка тонет.

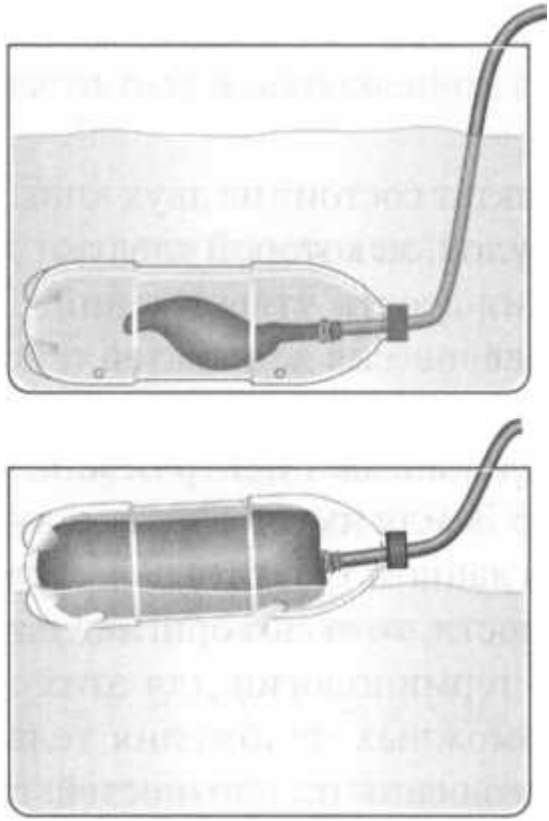


РИС. 1

Это устройство не только схематически представляет работу рыбьего плавательного пузыря, но может иллюстрировать принцип, который используют подводные лодки.

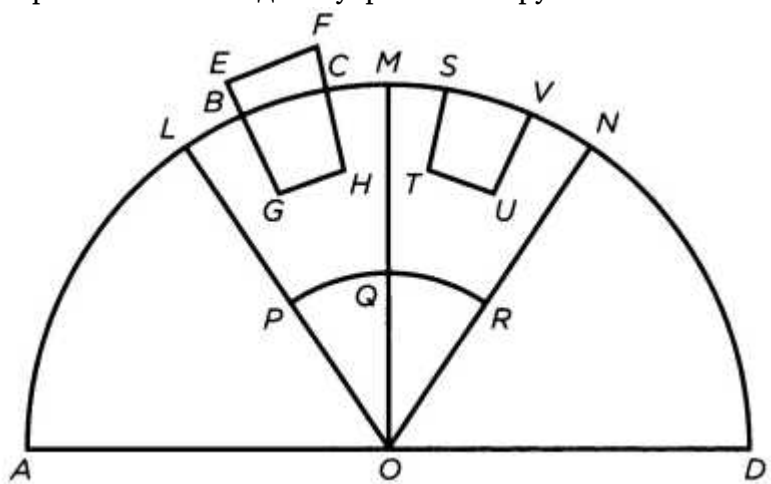
РИС. 2

Чтобы сделать «водолаза» своими руками, понадобится только пластиковая бутылка, открытый с одной стороны цилиндрический сосуд (например, пробирка) и вода.

Чертенок Декарта

«Картезианский водолаз», или «чертенок Декарта», (рисунок 2) — это классическая игрушка для поклонников занимательной физики, которая представляет принцип всплытия и погружения субмарин. Она состоит из сосуда с водой, в которую помещен предмет, частично наполненный воздухом. Конструкция сделана так, что воду можно сжимать либо с помощью мембраны на крышке, либо просто надавливая на стенки сосуда. Согласно закону Паскаля это давление передается на все точки жидкости, таким образом воздействуя и на предмет и, соответственно, на заключенный в нем воздух. Так как воздух отличается высокой степенью сжимаемости, «чертенок» представляет собой систему, которая позволяет менять плотность предмета и тем самым управлять его погружением или всплытием.

Верны также и утверждения 1 и 2, в которых говорится, что поверхность жидкости в спокойном состоянии представляет собой шар с центром, расположенном в центре Земли: «Поверхность установившейся неподвижно жидкости имеет форму шара с тем же центром, что и у Земли». Утверждение 3 являет собой небывалый уровень абстракции: если у тела та же плотность, что и у жидкости, в которую оно погружено, то тело остается неподвижным в том месте жидкости, куда его поместили, то есть находится в состоянии статического равновесия. С другой стороны, если в жидкость погружается тело, плотность которого меньше плотности жидкости, то оно будет погружено в нее только частично. Этот вывод изложен в утверждении 4, а развивает его утверждение 5 (см. рисунок): объем жидкости, вытесненной погруженной частью тела, будет иметь вес, равный весу всего тела. Речь идет о явном предшественнике принципа равнодействия сил, который стал известным благодаря Ньютону. Простой способ понять его — это опустить в воду винную бутылку с примерно стаканом воды внутри: она погрузится частично.



В трактате «О плавающих телах» все доказательства чисто геометрические, как обычно и бывало в то время. Данный рисунок относится к утверждению 5 первой книги в издании Хита. Текст полон подобными рисунками, которые снабжаются пространными геометрическими комментариями. Они приводятся в качестве иллюстраций, ведь такие тексты трудны для восприятия, потому что изобилуют математическими терминами и символами.

В утверждении 6 говорится, что если к телу, находящемуся в жидкости с большей, чем у него, плотностью, приложить силу, на тело начнет действовать направленная вверх выталкивающая

сила, которая заставит его всплыть и плавать на поверхности, уменьшив его вес. В утверждении 7 мы находим идею, согласно которой, если мы опустим тело в жидкость с меньшей, чем у него, плотностью, оно опустится на дно сосуда, хотя его вес тоже уменьшится. В обоих случаях Архимед показывает, насколько уменьшится вес тела: «На количество, равное весу жидкости, объем которой совпадает с объемом твердого тела». Это и есть, иными словами, знаменитый закон Архимеда.

ПОСИДЕТЬ НА ВОДЕ

Мертвое море — это большое озеро около 80 км в длину и не больше 16 км в ширину, расположенное на границе Израиля и Иордании. Главная его отличительная особенность состоит в том, что из-за очень высокого содержания солей вода в нем по плотности намного превосходит обычную морскую воду, доходя до 1240 кг/м^3, что позволяет человеку без какого- либо труда лежать на ее поверхности. Как можно понять из его названия, в Мертвом море не может жить никакое живое существо, кроме некоторых видов оомицетов и высших грибов.

В Мертвом море купающиеся лежат на поверхности воды, как поплавки.

Закон рычага

Многие историки науки считают трактат Архимеда «О равновесии плоских фигур» началом математической физики. И это, несомненно, не преувеличение, хотя и у философов предыдущей эпохи можно найти рассуждения о рычаге. Так, примерно за век до Архимеда Аристотель писал об элементах рычага и сформулировал «закон равноплечего рычага», однако, насколько можно судить, данные выкладки не привлекли к себе особого внимания; впоследствии даже было высказано мнение, что они вставлены в текст философа позднейшим переписчиком. С другой стороны, интересны изыскания Архита Тарентского (430-360 до н. э.), которые, впрочем, не вышли за пределы чисто экспериментальных конструкций. Архимед, конечно же, не был первым, кто воспользовался рычагом, но он впервые описал его принцип, связав воедино математику и физику.

ТРУБА-ВЕСЫ

Одно из первых упоминаний закона рычага, хотя и не в научном смысле, мы находим в комедии «Мир» древнегреческого драматурга Аристофана (444-385 до н. э.), написанной в 421 году до н. э. В этом произведении автор выводит различных современных ему деятелей, включая Эврипида. Горожанин Тригей насмехается над торговцем оружием, советуя ему использовать трубу как неравноплечие весы.

Тригей Постой, дружок!

Жмет в мягком месте. Не куплю! Неси назад!

Торговец оружием А с этой боевой трубой что делать мне?

Ведь за нее я отдал шесть десятков драхм.

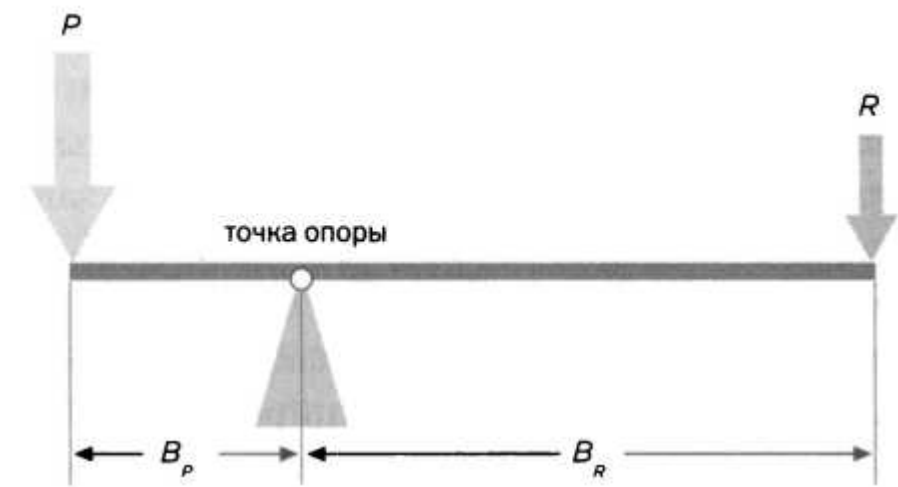
Тригей Сюда в воронку жидкого свинца нальем, прицепим

сверху небольшую палочку, и коттаб превосходнейший получится.

Торговец оружием Ты все смеешься?[1 Перевод А. Пиотровского.]

Исторические рассказы из первой главы нашей книги показывают, что использование рычага в повседневной жизни было для Архимеда обычным делом — как при постройке машин для обороны Сиракуз, так и при других работах. Уровень

абстракции, до которого дошел Архимед при исследовании рычага, не имел до этого прецедентов: он устранил все привходящие характеристики, рассматривая исключительно идеальные весы, а все тела считая точечными объектами (он говорил о силе и о центре тяжести как о единственных физических свойствах тела). Таким образом, в своем трактате Архимед пользуется концепцией идеальных весов, хотя и не формулирует ее в чистом виде. Самые простые по конструкции весы представляют собой подвешенную за середину рейку с висящими с двух сторон чашками. Когда вес предметов, лежащих на чашках, равный, конструкция сбалансирована в равновесии. Само понятие «баланс» происходит от двух латинских слов — bis (два) и lanx (чаша). И, таким образом, весы представляют собой типичный равноплечий рычаг.



P: сила. Эта приложенная сила может представлять собой определенный вес.

R:сопротивление. Сила, которая сопротивляется приложенной силе и тоже может выражаться в подвешенном весе.

B_P: плечо силы. Участок рычага между точкой приложения силы и точкой опоры.

B_R: плечо сопротивления. Участок рычага между точкой сопротивления и точкой опоры.

Простой рычаг (см. рисунок) состоит из жесткой балки, которая может свободно вращаться вокруг точки подвеса или опоры. В этой балке различают две части — плечо силы (к которому прикладывается усилие) и плечо сопротивления (на него передается усилие). Используется столь простой механизм следующим образом: нагружается одно плечо рычага или к нему прикладывается усилие, после чего достигается равновесие, или же система выводится из равновесия. Закон рычага устанавливает

соотношение между силами, воздействующими на каждое плечо рычага, и длинами плеч: соотношение сил равно соотношению расстояний от точек приложения этих сил до точки опоры. Данная пропорция и есть одно из главных достижений Архимеда, который разработал следующую математическую формулу:

$P \cdot B_p = R \cdot B_r$.

Три рычага

В средней школе любой страны обычно изучают три типа рычагов. Поскольку рычаг включает в себя три различных элемента (плечо силы, опора и плечо сопротивления), то в зависимости от их взаиморасположения мы можем разделить рычаги на три типа. Примеры всех трех типов можно найти в строении человеческого тела (рисунок 3). Архимед в своих трактатах сформулировал закон рычага, но не классифицировал различные типы рычагов — возможно, это казалось очевидным. Тем не менее не лишним будет вспомнить данную классификацию.

В рычаге первого типа (рисунок 4) точка опоры расположена между плечами силы и сопротивления. Это именно тот рычаг, который встречается в текстах Архимеда. Примерами рычага первого типа могут служить весы, качели, клещи. В рычаге второго типа (рисунок 5) точка сопротивления находится между точкой приложения силы и точкой опоры. В качестве примеров такого рычага можно привести тачку, щипцы для орехов или открывалку для бутылок.

В рычаге третьего типа (рисунок 6) точка приложения силы находится между точкой сопротивления и точкой опоры. Примеры: степлер, антистеплер и щипчики для завивки ресниц.

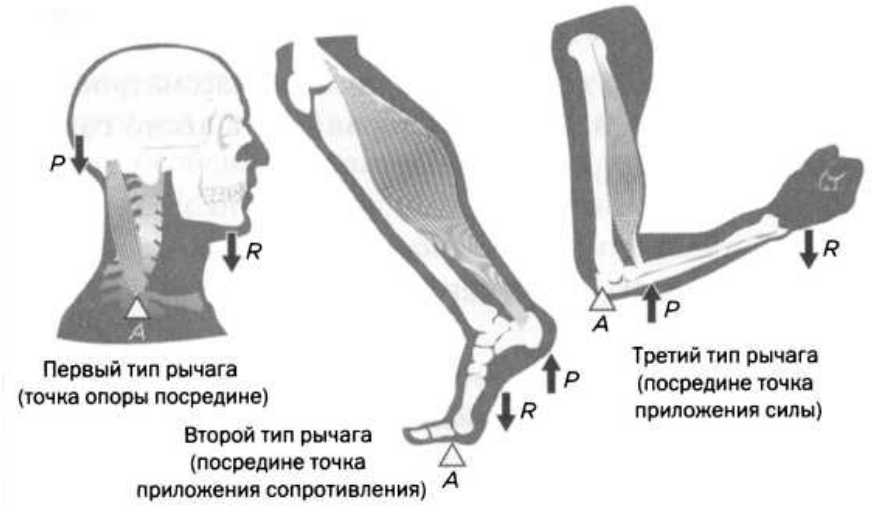


РИС. 3

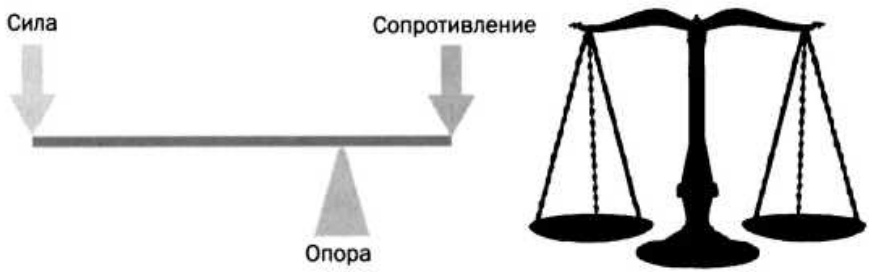


РИС. 4

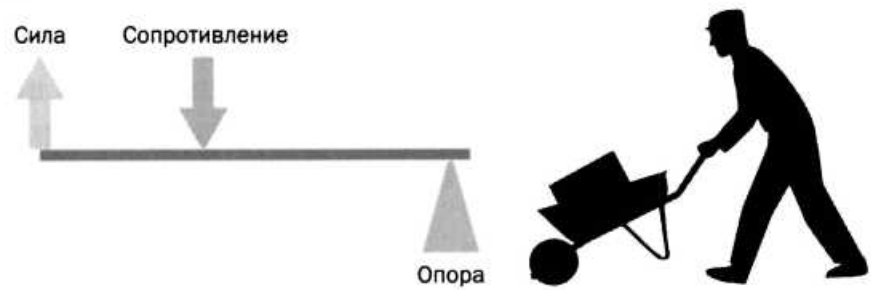


РИС. 5

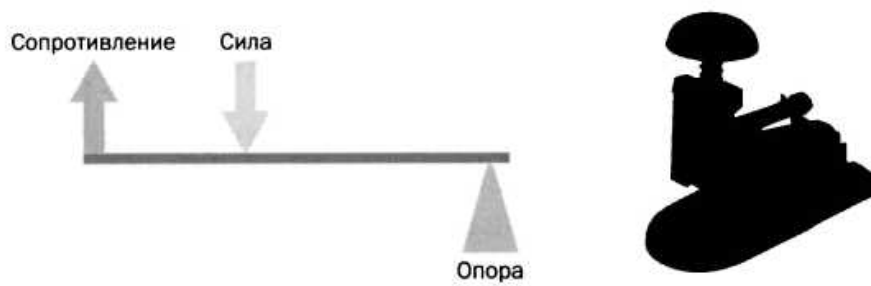


РИС. 6

О равновесии плоских фигур

Трактат «О равновесии плоских фигур» выделяется из числа других математических сочинений той эпохи: в нем нет определений. Отсюда возникла гипотеза, что трактат представляет собой краткое резюме некоторого очень важного труда. В том виде, в каком он дошел до нас, он состоит из двух книг.

Первая книга начинается семью постулатами (некоторые авторы считают, что это аксиомы) и продолжается пятью утверждениями, в которых в скрытом виде используется принцип равновесия равноплечих весов, чтобы продемонстрировать различные положения о равновесии тел. Последние утверждения касаются центра тяжести треугольника, параллелограмма и трапеции.

Во второй книге в десяти утверждениях рассматривается равновесие сегмента параболы. Вторая книга тесно связана с трактатом о квадратуре параболы.

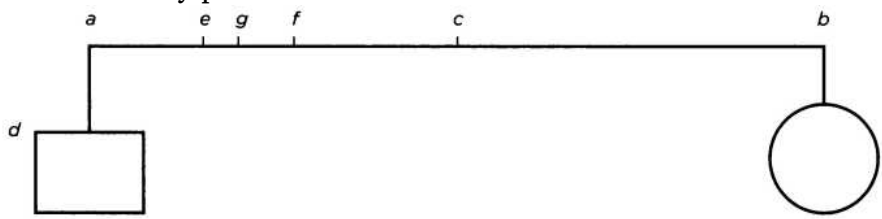
«Дайте мне точку опоры, и я переверну землю»

В VIII книге «Математического собрания» Папп рассказывает об Архимеде и о рычаге. По утверждению автора Архимед произнес следующую фразу: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю». С помощью несложных вычислений мы увидим, что это невозможно, и странно, если Архимед допустил такую ошибку. Предположим, что для нашего предприятия мы используем рычаг первого типа, а Земля будет располагаться в 1 м от точки опоры. Сразу отметим, что у Земли нет веса, ведь она находится в космическом пространстве и не опирается ни на какую планету или иное космическое тело. Но предположим, к примеру, что мы поместили Землю на суперрычаг, который опирается на суперпланету. В случае если земля представляет собой материальную точку, отстоящую от точки опоры на 1 м, на каком расстоянии должен находиться Архимед, чтобы приложить силу к другому плечу рычага? Так как масса Земли примерно равна $6 \cdot 10^{24}$ кг и с учетом предположения, что Архимед прикладывает усилие, равное 60 кг, расстояние от точки опоры должно быть следующим:

$P \cdot B_p = R \cdot B_r$

$B_p = 1$ м $\cdot$ $(6 \cdot 10^{24}$ кг$)/60$ кг $= 10^{23}$ м.

Если вы не привыкли к математическим формулам, этот результат может вас и не впечатлить, но подстановка привычных единиц длины показывает, что речь идет о 10 млн световых лет (10^{16})! Возраст нашей Вселенной около 13700 млн лет ($1{,}37 \times 10^{10}$). Если мы будем считать Вселенную сферической, то от одного ее конца до другого получится 27 400 млн световых лет. Выходит, что всего 2740 таких рычагов покроют расстояние, равное диаметру Вселенной! Кроме того, как мы увидим, сам Архимед представлял Вселенную куда более маленькой, поэтому особенно странно, что он допустил такую ошибку в расчетах. Если он и правда произнес что-нибудь подобное, то, очевидно, только в метафорическом смысле, чтобы показать, насколько может увеличить силу рычаг.



Галилей схематичным рисунком проиллюстрировал задачу с короной. Такую схему он использовал в статье «Маленькие весы».

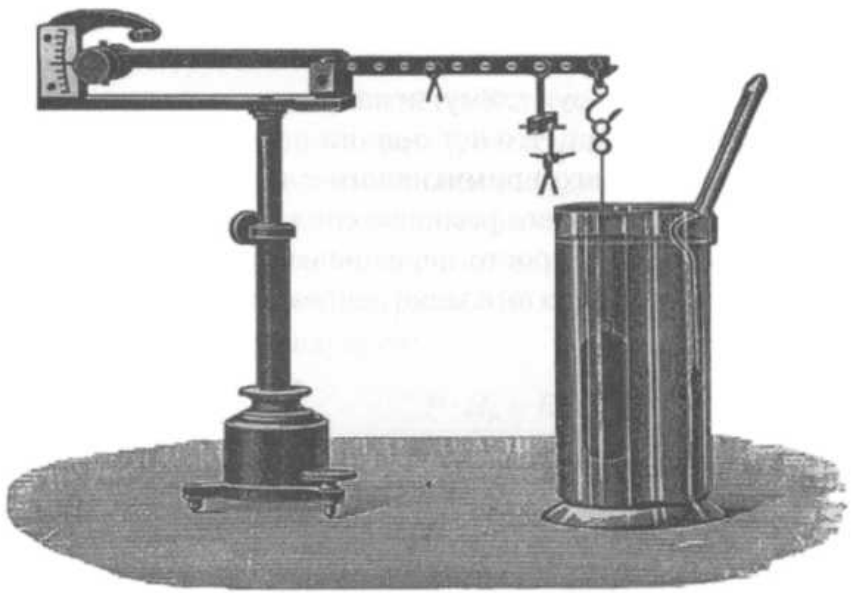
Галилей, последователь Архимеда

В 1586 году Галилео Галилей (1564-1642) написал очень короткую статью под названием «Маленькие весы», в которой проанализировал рассказ Витрувия о короне тирана Гиерона. Будучи большим знатоком трудов Архимеда и его научного наследия, Галилей довольно скептически отнесся к способу, которым, по представлениям римского архитектора, была решена эта задача. В качестве своего варианта он выдвинул идею гидростатических весов и в общих чертах развил ее меньше чем на пяти страницах, используя схему, показанную на рисунке. В статье Галилей объясняет, что нет причин подозревать Архимеда в проведении такого примитивного с научной точки зрения эксперимента, ведь в его распоряжении были способы гораздо более тонкие, чем просто перелившаяся через край вода. Далее он говорит, что его выкладки основаны на идеях самого Архимеда, содержащихся в трактатах о плавающих телах и о равновесии, а также упоминает об инструменте, которым пользовался Архимед, — гидростатических весах, хотя в наши дни изобретение этих

весов часто приписывается самому Галилею. В данной работе он обращает внимание на то, как сложно на глаз различить столь малую разницу в уровнях воды. Тем самым Галилей провел биографическую реконструкцию, которую можно назвать безупречной.

Весы Мора-Вестфаля

Весы Мора-Вестфаля — это неравноплечие весы, используемые для определения плотности жидкостей. Научный принцип, на котором они основываются, учитывая, что это те же самые гидростатические весы,— это закон Архимеда. Они были изобретены немецким фармацевтом Карлом Фридрихом Мором (1806-1879).



Короткое плечо несет противовес, а с длинного свисает поплавок, и в него набирается жидкость, чью плотность предстоит измерить относительно плотности жидкости, в которую поплавок погружается.

Надо заметить, что он глубоко изучил научные труды Архимеда и всегда выказывал глубочайшее уважение к его методу работы и достижениям. Галилей цитирует Архимеда в своих книгах, например в «Диалоге о двух новых науках», «Пробирных дел мастере» и «Маленьких весах», а кроме того, упоминает его во многих письмах. Исследование движения тел, которым занимался Галилей, основано как раз на гидростатике Архимеда. Так,

итальянский ученый представил себе движение в среде, которая оказывала все меньше сопротивления движущемуся телу. В итоге он пришел к своим выводам и сформулировал знаменитые уравнения движения в отсутствии воздуха, хорошо понимая, что в его время нельзя было в точности доказать их истинность из-за сопротивления реального воздуха при падении тела. Уравнения Галилея о движении описывают положение тела и его скорость в вакууме и могут быть с большой точностью применены в гравитационном поле: например, при сбрасывании тела с некоторой высоты. И все-таки воздух создает сопротивление падению, а это значит, что в реальных земных условиях они неверны. В 1971 году астронавт Дэвид Скотт уронил перо и молоток на поверхность Луны, чтобы убедиться, что они достигнут поверхности одновременно, учитывая отсутствие там атмосферы, а следовательно, и сопротивления воздуха. Таким образом уравнения Галилея были доказаны экспериментально. «Это показывает, что идеи господина Галилея верны»,— заметил Скотт после окончания знаменитого опыта. Его эксперимент стал жестом уважения к итальянскому ученому и, опосредованно, к его учителю — Архимеду.

Исчисление песчинок

Единственной работой Архимеда, которую можно назвать научно-популярной, является книга «Исчисление песчинок» (иногда ее называют также по-гречески — «Псаммит»), Открывается этот трактат посвящением Гелону Сиракузскому, сыну Гиерона II. Осознавая трудности, способные возникнуть у адресата с чтением научной книги, Архимед ободряет его словами: «Но я постараюсь объяснить тебе все с помощью геометрических построений, которые ты можешь понять...». После же долгих операций с гигантскими числами Архимед заканчивает изложение, вспомнив о людях, не слишком знакомых с математикой, и в заключение вновь обращается к Гелону: «Надеюсь, что и ты понял это все». Некоторые специалисты считают, что данная работа не слишком интересовала ни людей того времени, ни представителей последующих эпох, к тому же она была написана на сиракузском диалекте. Несмотря на это, само существование такой книги говорит о том, что Архимед был близко знаком с реальной жизнью, интересовался популяризацией науки и распространением знаний. В трактате он задается вопросом, сколькими песчинками можно было бы заполнить Сиракузы — бесконечно ли их количество? В тексте говорится, что нет. Затем ученый высчитывает, сколько песчинок бы вместила Сицилия, сколько понадобилось бы для наполнения всех гор Земли... И так вплоть до числа песчинок, необходимых для заполнения Вселенной. Архимед хочет показать Гелону, что даже их число не бесконечно.

Поэтому ясно, что количество песчинок, равное по размеру сфере неподвижных звезд, наличие которой предполагает Аристарх, меньше, чем 1000 мириад «восьмых» чисел.

Архимед о том, какое количество песчинок необходимо, чтобы заполнить Вселенную

В то время не существовало названий для чисел, обозначающих настолько большие количества. Поэтому Архимед взялся за реформу системы счисления, предложив внести в нее некоторые изменения, чтобы иметь возможность оперировать большими числами. Принципиальное ограничение древнегреческой числовой системы состояло в том, что для обозначения чисел использовались буквы, и это вносило в операции с большими числами настоящий хаос. С концептуальной точки зрения Архимед в своем трактате делает

попытку приближения к нынешней числовой системе, которая позволяет нам записывать по желанию любые самые большие числа. «Исчисление песчинок» не нужно считать просто математическим развлечением — в этом труде ученый касается греческой астрономии и прямо упоминает своего отца, астронома Фидия, как мы увидим чуть позже. Архимед начинает «Исчисление песчинок» с пояснения, что он понимает под «миром», и излагает здесь мнение большинства астрономов: мир — это шар, в центре которого находятся Земля и Солнце. Он не поддерживает гелиоцентрическую гипотезу Аристарха Самосского (310-230 до н. э.). Но интересно, что он отвергает ее не потому, что считает невозможным движение Земли, как это делали последующие поколения астрономов, а из-за неувязки, описанной так:

«[...] [Аристарх Самосский] полагает, что Земля обращается вокруг Солнца по окружности круга, расположенной посредине между Солнцем и неподвижными звездами, а сфера неподвижных звезд имеет тот же центр, что и у Солнца, и так велика, что круг, по которому, как он предположил, обращается Земля, так же относится к расстоянию неподвижных звезд, как центр сферы к ее поверхности. Но хорошо известно, что это невозможно: так как центр сферы не имеет никакой величины, то нельзя предполагать, чтобы он имел какое-нибудь отношение к поверхности сферы».

Несмотря на то что Архимед легко заметил логическое несоответствие в приравнивании точки к поверхности, в данном случае он прячется за аргументацией ad logicam, то есть просто прибегает к уловке. То, что фраза неправильно построена, не значит, что аргументация Аристарха ошибочна. Так или иначе, он сообщает Гелону, что числа, которыми он будет оперировать, превосходят даже число песчинок, которыми можно было бы заполнить всю Вселенную. Затем он делает предположение, что земная окружность составляет 300 мириад стадиев, и напоминает: Земля больше Луны и меньше Солнца. Одна мириада — это 10000. Тем не менее сопоставление стадия с мерами длины нынешней Международной системы представляет собой некоторую проблему: в древности стадий не был неизменной единицей длины, он был разным. В любом случае здесь важна не точность измерения Земли, а стремление Архимеда показать, что он может записать любое число. В этой работе он рассуждает также о соотношении диаметров Солнца, Земли и Луны. Как раз здесь он упоминает своего отца:

«Таким образом, диаметр Солнца в 30 раз больше диаметра Луны и не более того, хотя среди прежних астрономов Евдосий считал, что он больше в 9 раз, мой отец Фидий — что в 2 раза, а Аристарх пытался доказать, что диаметр Солнца более чем в 18 раз больше диаметра Луны, но менее чем в 20».

Хотя можно отметить, что тема измерения небесных тел всегда была интересна астрономам, Архимед касается ее только походя, чтобы детально описать изготовление диоптра — инструмента, который греческие астрономы использовали для замеров положения звезд. Он вскоре заканчивает рассуждения о размерах, чтобы перейти к своей новаторской числовой системе. Что касается последней, по-видимому, до нас не дошел труд, о котором он пишет:

«Но я полагаю, что было бы полезным также поговорить о названиях чисел — среди прочего, чтобы не пропало то, что я написал в книге, посвященной Зевксиппу, поскольку по этому вопросу раньше никто ничего не говорил. На самом деле получается, что известные наименования чисел доходят до нескольких мириад. Здесь же называются числа до мириад мириад».

В итоге Архимед вводит последовательные возрастающие порядки чисел, замечая, что так можно обозначить любое число. Описав числовую систему, он выполняет ряд оценочных расчетов: например, он предполагает, что в одном маковом зернышке умещаются 10 000 песчинок. В конце концов он доходит до числа песчинок, которым можно было бы заполнить Вселенную. В нашей системе записи это было бы 10^{63}, то есть единица и после нее 63 нуля.

Октады Архимеда

Предложенная Архимедом в «Исчислении песчинок» числовая система известна как система октад, и в свое время у нее был большой потенциал, хотя она и осталась неизвестна большинству математиков. Вплоть до эпохи Архимеда использовались следующие термины: единица, десяток, сотня, тысяча и мириада (10000). Он же предложил пойти дальше мириады. Дойдя до конца цифр, он решил разбить их на восемь разрядов — вышеперечисленные цифры и их произведения.

Архимед	Математическая запись	Название
Единица	$1 = 10^0$	Один
Десяток	$10 = 10^1$	Десять
Сотня	$100 = 10^2$	Сто
Тысяча	$1000 = 10^3$	Тысяча
Мириада (единица мириад)	$10000 = 10^4$	Десять тысяч
Десяток мириад	$10\text{-}10000 = 10^5$	Сто тысяч
Сотня мириад	$100\text{-}10\,000 = 10^6$	Миллион
Тысяча мириад	$1000\text{-}10\,000 = 10^7$	Десять миллионов
Мириада мириад	$10000\text{-}10000 = 10^8$	Сто миллионов

Таким образом, мы имеем систему, основой которой является 10^8 — число, именуемое октадой. Каждый раз при превышении этого цикла число переходит из одного разряда в другой со следующими названиями.

От 1 до 10^8 - 1	«Первые числа», первое число этого разряда — 1
От 10^8 до 10^{16}-1	«Вторые числа», первое число этого разряда —10^8
От 10^{16} до 10^{24} - 1	«Третьи числа», первое число этого разряда —10^{16}

и так далее

Следовательно, мы можем дойти до 10^8 в степени 10^8, и все это — числа «первого периода». Дальше счет может перейти ко второму периоду, третьему периоду и так далее. Наибольшее число, которое называет Архимед, это «мириадно мириадный» период, то есть

$$\left(\left(10^8\right)^{\left(10^8\right)}\right)^{\left(10^8\right)} = 10^{\left(8\cdot 10^{16}\right)},$$

или же единица с 80 трлн нулей (80000 10^{12}) ... Действительно невероятное число!

В заключении «Исчисления песчинок» Архимед приходит к утверждению, что во Вселенной может поместиться 1000 мириад восьмых чисел (10^{56}) песчинок. Это значит, что число песчинок, которыми можно заполнить Вселенную, составляет $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{56} = 10^{63}$.

Сегодня такие величины в некоторых областях науки и технологии обычны. Во Вселенной, например, содержатся 10^{82} протонов, а самое большое из имеющих название число — это гугол, то есть 10^{100} (1 и сотня нулей). Термин гугол придумал в 1938 году Милтон Сиротта, девятилетний внук американского математика Эдварда Казнера. Любопытный факт: название поисковой системы Google произошло как раз от английского написания слова «гугол» (googol). А в Калифорнии штаб-квартира Google называется Googleplex, что напоминает о гуголплексе — термине, который Казнер использовал для числа 10^{googol}, то есть 10 в степени, которая выражается единицей со 100 нулями.

ГЛАВА 3
Защитник кругов

Эпоха Архимеда представляет собой водоворот открытий и исследований в области математики. Многие талантливые ученые посвятили себя этой науке, и все же Архимед выделяется среди них тем, что он ввел новые методы и анализировал уже известные результаты со своей собственной точки зрения. Он вошел в историю благодаря вычислению приближения числа π и улучшению метода исчерпывания, необходимого для определения объемов и площадей криволинейных геометрических фигур.

Хотя широкая публика знает Архимеда как физика и механика, большинство его научных трудов посвящены математике. Он даже просил выбить на его могиле символы одной из решенных им геометрических задач. Ученый занимался практически всеми проблемами, актуальными для его времени; находил новые доказательства и создавал новые методы. Он поднял методы исчерпывания и доведения до абсурда до невиданных в ту эпоху высот. Также Архимед вплотную подошел к исчислению бесконечно малых величин и интегральному исчислению и смог использовать свои открытия в области рычага для получения новых математических результатов. В этой главе мы рассмотрим некоторые из важных достижений, описанных в его трудах, начиная с тех методов, которые ученый применял в своих исследованиях для анализа особых случаев.

Методы Архимеда

Научный успех Архимеда почти полностью основан на используемой им методологии. В целом применяемые ученым методы можно разделить на две группы: первая направлена на поиск интересующего его решения (механический метод), а вторая — на доказательство верности полученного результата. В работах Архимеда часто встречаются цитаты из текстов Евклида и других более ранних математиков, то есть он приводит многие решения как само собой разумеющееся и для краткости говорит о них в своих трудах, словно они всем известны. Таким образом, мы видим математика, который работает с достойными доверия источниками и умеет извлекать из них материал, необходимый для его собственных исследований. В наши дни для любых доказательств мы используем алгебраический язык (формулы с буквами, цифрами и математическими символами), но в рассматриваемое нами время, когда жил Архимед, такого языка еще не существовало. Вот почему его тексты нелегки для современного читателя, ведь все его рассуждения основываются на чисто геометрических понятиях. Далее мы представим некоторые математические открытия Архимеда и постараемся реконструировать путь его мысли, хотя для этого нам и придется прибегать к языку алгебры.

Метод механических теорем

Из книги «Метод механических теорем» можно понять, что Архимед не скрывал свои методы от научного сообщества того времени, как мы уже показывали на примере константинопольского палимпсеста. В частности, он отправил этот труд Эратосфену, решив, что в данном случае он попадет в хорошие руки и сможет послужить получению новых интересных результатов.

Несмотря на то что Герои цитирует эту книгу в своем трактате «Метрика», многие источники описывают Архимеда ученым, ревниво относившимся к своей работе и не склонным популяризировать свою методологию. К счастью, в 1906 году исследователь-эллинист Гейберг обнаружил «Метод» и другие труды ученого, содержащиеся в палимпсесте. На самом деле Архимед охотно обнародовал и свои открытия, и научные методы, приведшие к этим открытиям. Он даже побуждал Эратосфена воспользоваться его методикой, уверяя последнего, что «можно

было бы использовать этот путь для того, чтобы достичь определенных научных результатов посредством механики».

[…] написав это, обнародовать данный метод потому, что я о нем уже раньше упоминал — а я не хочу, чтобы казалось, будто я занимался пустой болтовней, — а также и потому, что я убежден: он принесет немалую пользу для математики.

Из письма Архимеда Эратосфену в «Методе»

Таким образом, в данной работе Архимед объясняет собственный механический метод. Кроме механического метода трактат содержит и геометрический (метод исчерпывания), приписываемый Евдоксу. Механический метод здесь использован исключительно для приблизительного решения задач, которые требуют затем более строгого и убедительного доказательства геометрическими методами:

«[…] Ведь некоторые вещи, которые я сначала представлял механическим способом, затем были мной доказаны с помощью геометрии, […] легче построить решение, уже имея определенные знания об исследуемых вещах, чем искать его без какого-либо начального знания».

После обращения к Эратосфену автор переходит к изложению 11 лемм, где содержится определение центра тяжести.

Здесь важно заметить, что он приводит как нечто само собой разумеющееся некоторые результаты из собственной работы «О равновесии плоских фигур». Трактат дошел до нас не полностью — из него сохранились 16 утверждений с некоторыми важными уточнениями. В первых 11 автор представляет механический метод сам по себе, а в остальных описывает весь процесс, включая последующее доказательство с помощью вышеупомянутого метода исчерпывания. Архимед затрагивает большое количество вопросов, которые он уже исследовал в предыдущих трудах: например, квадратура сегмента параболы — темы, изложенной в книге «О квадратуре параболы». Первое утверждение трактата, проиллюстрированное на рисунке на следующей странице, звучит так:

«Пусть ABC — сегмент, заключенный между отрезком прямой AC и параболой ABC; поделим AC напополам точкой D и проведем прямую DBE параллельно оси параболы, а также отрезки AB, BC. Я утверждаю, что сегмент параболы ABC по площади равен четырем третьим треугольника ABC». («Метод механических теорем», утверждение 1.)

СТОМАХИОН

С небольшим трактатом «Стомахион» произошло то же самое, что и с «Методом»: на протяжении истории было множество свидетельств его существования, но найден он был лишь в 1906 году с открытием константинопольского палимпсеста. В IV веке Авзоний и Марий Викторин говорили о Loculus Archimedius (шкатулке Архимеда) из 14 пластинок слоновой кости, которые вместе составляют квадрат. Все, что осталось от трактата,— это изложение способа деления квадрата на 14 частей (рисунок 1). Кроме того, там приводятся соотношения площадей фрагментов и полного квадрата. Не очень понятно, было ли это главным содержанием «Стомахиона»: хотя некоторые усматривают здесь начало комбинаторики, другие считают данное описание не более чем развлечением, чем-то вроде пазла или танграма.

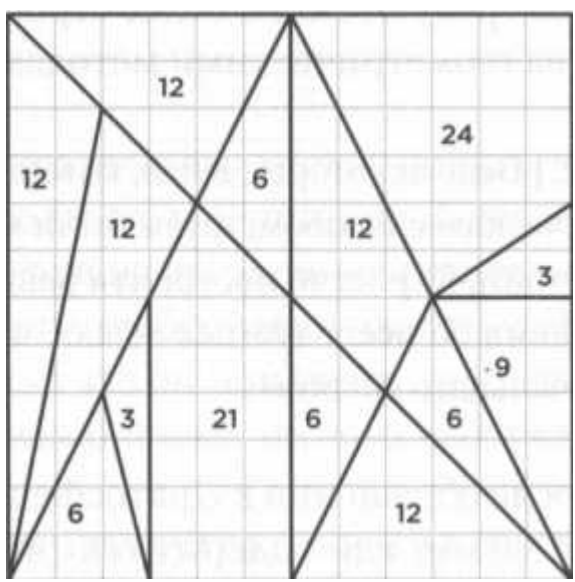


РИС. 1

Если мы наложим фигуры из «Стомахиона» на квадрат стороной в 12 клеток, площадь каждой фигуры будет такой же, какой она обозначена на рисунке. Простой способ воспроизвести данные фигуры — взять листок бумаги в клеточку. Числа на фигурах обозначают их площадь.

Лишь в 2003 году удалось провести строгий

комбинаторный анализ, который показал, что существуют 17152 способа сложить фигуры из «Стомахиона» в целый квадрат, и это если не принимать во внимание возможность их поворота или зеркального отражения (рисунок 2).

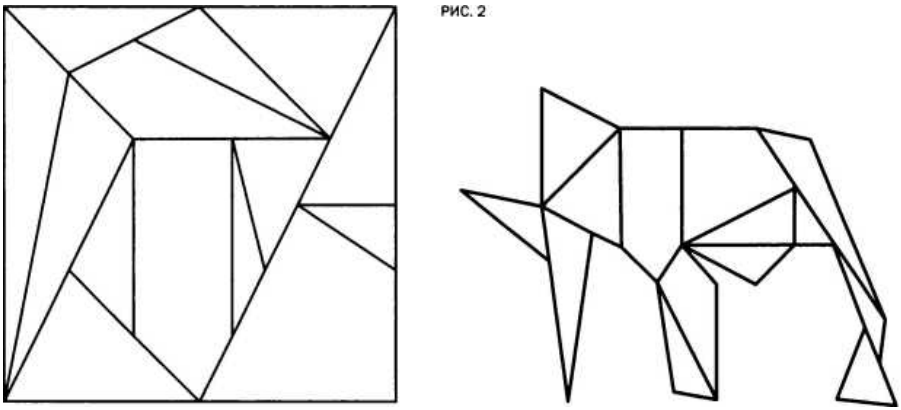
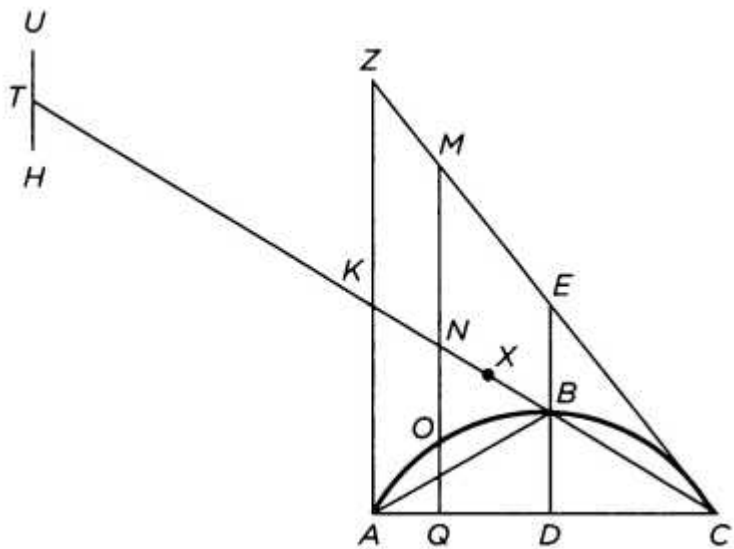


РИС. 2

Перемещая фрагменты, можно не только составить квадрат, но и создавать веселые фигурки вроде этого слона.



Воспроизведение геометрического чертежа, которым воспользовался Архимед, чтобы выяснить соотношение площадей сегмента параболы и вписанного в него треугольника. Основой для данного решения служит механический метод.

Исчерпывающая математика: метод исчерпывания

В древнегреческой математике в какой-то момент начался серьезный кризис, связанный с так называемыми невыразимыми числами, которые не могут быть представлены отношением целого числа к натуральному. В настоящее время такие числа называются иррациональными. Такое их свойство вызвало большие проблемы при сравнении криволинейных и прямолинейных фигур. Это значит, что греки сталкивались с серьезными сложностями, если хотели вычислить площадь круга или иных фигур, ограниченных кривыми, а также и некоторые другие величины, например диагональ квадрата. Данная проблема была частично решена благодаря методу исчерпывания, который можно считать предшественником современного исчисления бесконечно малых величин и вычисления предела. Уже Евклид использовал его в некоторых построениях в своих «Началах», а Архимед применял его в течение всей своей математической карьеры. И именно он назвал автором этого метода Евдокса во вступлении к своему трактату «Метод механических теорем».

Невозможно найти во всей геометрии более сложные и более важные вопросы, изложенные столь простыми и столь понятными словами, как в теоремах, созданных божественным разумом Архимеда.

Плутарх (46/48-125/127 н. э.), историк

Метод исчерпывания и сейчас известен под таким названием. Само выражение «метод исчерпывания» было впервые введено бельгийским математиком Грегуаром де Сен-Венсаном (1584-1667), а затем распространилось повсеместно.

Чтобы использовать данный метод, мы вписываем многоугольник в криволинейную фигуру и описываем его вокруг нее. Это значит, что криволинейная фигура получается зажатой изнутри и снаружи. Теперь последовательно увеличиваем количество сторон у внутреннего многоугольника и у наружного, чтобы они как можно больше приближались по конфигурации к криволинейной фигуре. Метод исчерпывания, таким образом, можно считать общим понятием, которое раскладывается на две процедуры.

— *Исчерпывание: многоугольная фигура вписывается в криволинейную вплоть до исчерпывания последней, то есть так, чтобы осталось как можно меньше непокрытой площади.*

— *Сжатие: многоугольная фигура описывается вокруг криволинейной вплоть до того, как останется как можно меньше лишней площади.*

Действительно, мы можем найти настолько близкий к площади криволинейной фигуры многоугольник, насколько пожелаем. Данное положение носит название «аксиома Архимеда» (хотя подобная мысль была определенным образом выражена уже в евклидовых «Началах»). В современных терминах это означает, что если вы берете отрезок любой длины и отнимаете от него больше половины, а от его остатка снова отнимаете больше половины и так далее, то можно получить отрезок сколь угодно малой величины.

Большой шаг вперед при использовании аксиомы Архимеда состоит в идее приближения. Греческие математики искали точные и абсолютные ответы, из чего и строились их методы. С аксиомой Архимеда же любой человек, желающий узнать, например, площадь некоей фигуры, может подойти к решению сколь угодно близко, хотя и не получит точного ответа. В методологии Архимеда этот прием занимал действительно большое место, так что он даже обосновал его точным геометрическим доказательством: если имеется криволинейная фигура, можно с помощью метода двойного доведения до абсурда доказать, что ее площадь равна значению, полученному методом исчерпывания. Логическая последовательность такова.

— Дана криволинейная фигура с площадью S.

— Предполагается, что ее площадь составляет T (это и является предметом проверки).

— Следует доказать, что $S = T$.

— Сначала доказывается, что не может быть $S < T$.

— Затем — что не может быть $S > T$.

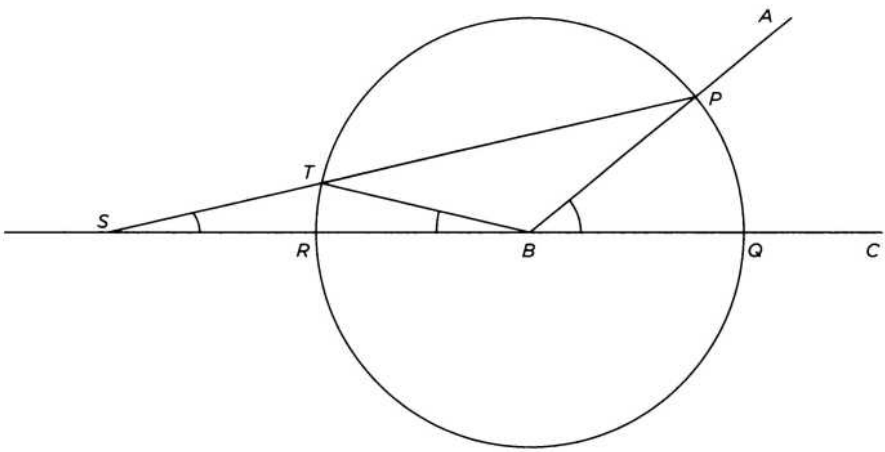
— Поскольку S не может быть ни меньше, ни больше T, следовательно, $S = T$.

Невсис

Невсис, что можно перевести с древнегреческого как «наклон», это техника геометрических построений. Она состоит в том, чтобы построить отрезок определенной длины между двумя кривыми так, что он (или его продолжение) пройдет через заданную точку. Речь идет о ручном построении: на линейке отмечаются две крайние точки отрезка, а затем линейка сдвигается, пока данные точки не лягут на соответственные кривые. Можно сказать, что это такой геометрический «счет на пальцах».

Под влиянием платоновского идеализма, который пронизывал греческую математику во времена Архимеда, все

математические доказательства делились в соответствии с определенной иерархией, отражавшей их красоту и изящество. Если что-то можно было выполнить при помощи линейки и циркуля, надо было пользоваться только этими инструментами. Если нет, то задача «спускалась» на второй уровень, как, скажем, конические сечения. К невсису допускалось прибегать только в тех случаях, когда другое решение отсутствовало. Архимед использовал невсис во многих ситуациях, например в утверждениях 5-9 книги «О спиралях», но мы остановимся подробно на трисекции угла (см. рисунок), описанной им в утверждении 8 «Книги лемм».



Трисекция угла с помощью невсиса.

— Дан угол ABC, который следует разделить на три.

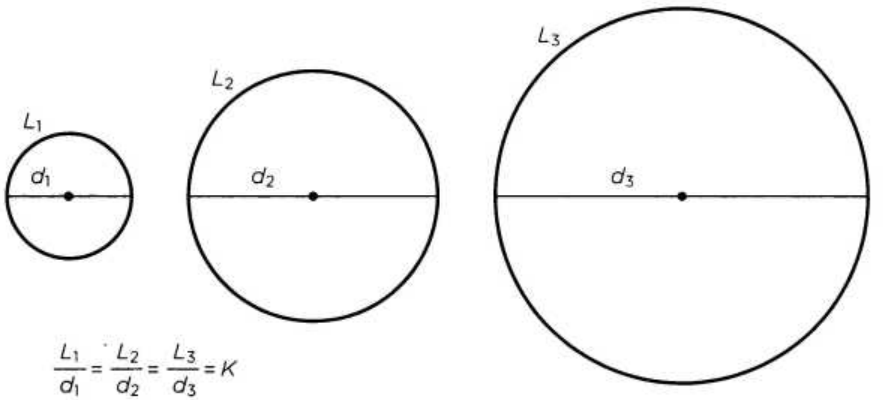
— Проводится окружность с центром B любого радиуса, которая пересекает луч B A в точке P, а луч BC в точке Q, луч BC продолжается до прямой, пересекающей окружность в точке R.

— Затем от точки P проводится прямая STP таким образом, чтобы точка S лежала на прямой CQBR, а T — на окружности, и при этом выполнялось условие ST = BQ = BP = BT. (Эта операция как раз требует применения невсиса и линейки с разметкой.)

— Далее легко показать: так как треугольники STB и TBP равнобедренные, то угол BST составляет треть от угла QBP, который требовалось разделить на три.

«ЗАСТЕНЧИВОЕ» ЧИСЛО π

Издревле люди замечали, что все круги, в сущности, представляют собой одну и ту же фигуру, только разных размеров — больше или меньше. Было понятно, что пропорции у них одинаковы, то есть соотношение между длиной окружности и ее диаметром является величиной постоянной. А значит, если разделить длину окружности на ее диаметр, мы всегда получим одно и то же число, определенную постоянную к. Но что это за число? Данный вопрос занимал не только древнегреческих математиков, стоял он и перед мыслителями других культур.



Все окружности имеют одно и то же соотношение (к) длины окружности и диаметра.

Для нахождения этого соотношения потребовались целые столетия и океан чернил. Древние математики пытались обозначить упомянутую пропорцию соотношением целых чисел, так что одно за другим появлялись различные приближения, призванные точнее выразить данную величину. И только в начале XIX века было доказано, что искомое соотношение представляет собой иррациональное число, вот почему все попытки получить его делением натуральных чисел были столь бесплодны. Сейчас это число называется π ***(греческое «пи»):***

длина окружности $= \pi \cdot$ ***диаметр***

Приближение Архимеда настолько удачно, что оно не только использовалось на протяжении многих столетий, но и сегодня вполне пригодно для решения различных практических задач. Согласно его расчетам, соотношение длины окружности и диаметра выражается формулой $L = 3{,}14d$.

В поисках числа π

В работе «Об измерении круга» отражены изыскания Архимеда в области соотношения длины окружности (L) и ее диаметра (d). Из утверждения 3 этого трактата следует, что длина окружности в 3,14 раз больше ее диаметра, то есть $L = 3{,}14\ d$.

Если мы вспомним выражение, знакомое всем со школы ($I = \pi \cdot d$), то увидим, что Архимед нашел значение я с точностью до второго знака после запятой, то есть у него $\pi = 3{,}14$. Это приближение использовалось все Средние века, а в некоторых случаях мы работаем с ним и сегодня, хотя и знаем, что на самом деле π — иррациональное число с бесконечным числом знаков после запятой.

Техника, которую применил Архимед для нахождения данного соотношения, была основана на методе исчерпывания, описанном выше. То есть он взял окружность и вписал в нее шестиугольник. Между периметром шестиугольника и окружностью осталось пространство, не покрытое шестиугольником. Затем он описал еще один шестиугольник вокруг окружности. Между периметром данного шестиугольника и окружностью осталось пространство, не покрытое окружностью. Естественно, из этого следует, что длина окружности больше периметра вписанного в нее шестиугольника и меньше периметра шестиугольника, описанного вокруг нее.

Можно провести аналогичное умозрительное построение, если использовать понятие площади, причем так будет даже нагляднее. Целью в таком случае будет вычислить площадь круга, ограниченного данной окружностью. Мы знаем, что эта площадь высчитывается по уравнению $S = \pi r^2$. Заметим, что если принять радиус за единицу ($r = 1$), то площадь будет равна π. Иначе говоря, если мы вычислим площадь окружности с радиусом 1, то получим число π. Архимед предполагал построить круг и как вписывать в него, так и описывать вокруг него правильные многоугольники, начиная с шестиугольника. Площадь круга S_c будет больше площади вписанного шестиугольника SH_p и меньше площади описанного SH_G (см. серые сегменты на рисунке 1). Этим методом невозможно точно определить площадь, но можно установить ее пределы: $2{,}5981 < S < 3{,}4641$, то есть она больше площади маленького шестиугольника (2,5981) и меньше площади большого (3,4641). Гениальная находка Архимеда состояла в том, чтобы удвоить число углов многоугольника, доведя его до 12-угольника (рисунок 2). В данном случае значение площади круга лежит между двумя более близкими величинами, так что расчет

становится более точным, поскольку площади обоих многоугольников приближаются друг к другу.

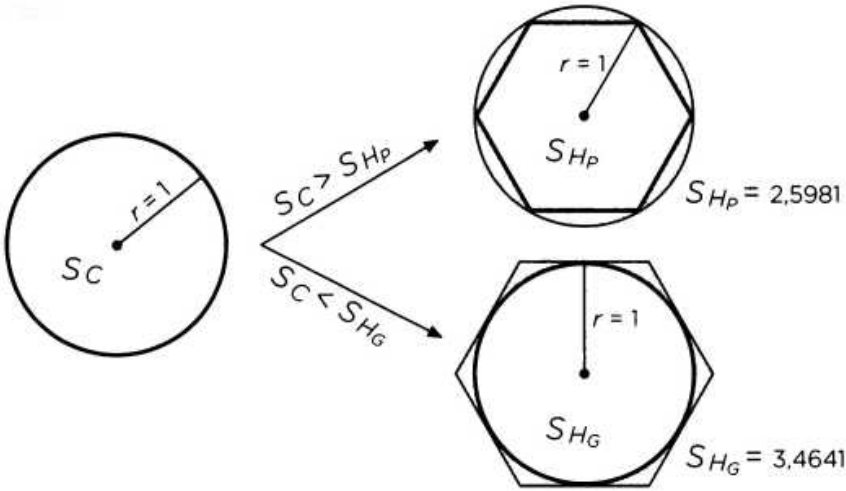


РИС. 1

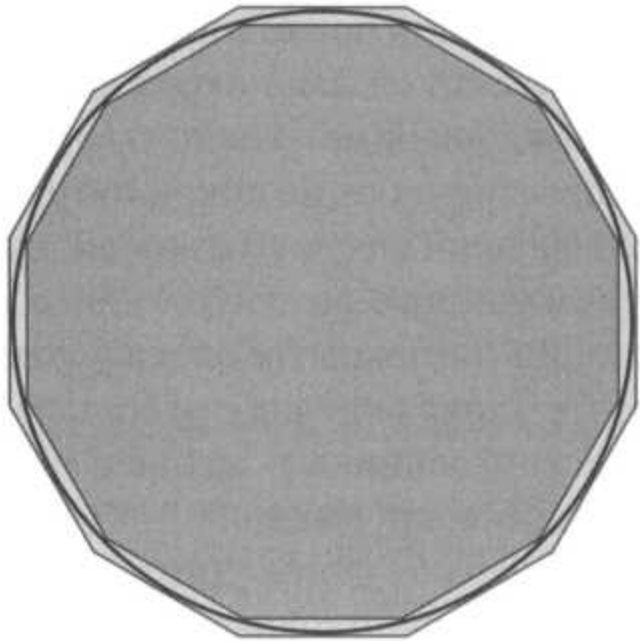


РИС. 2

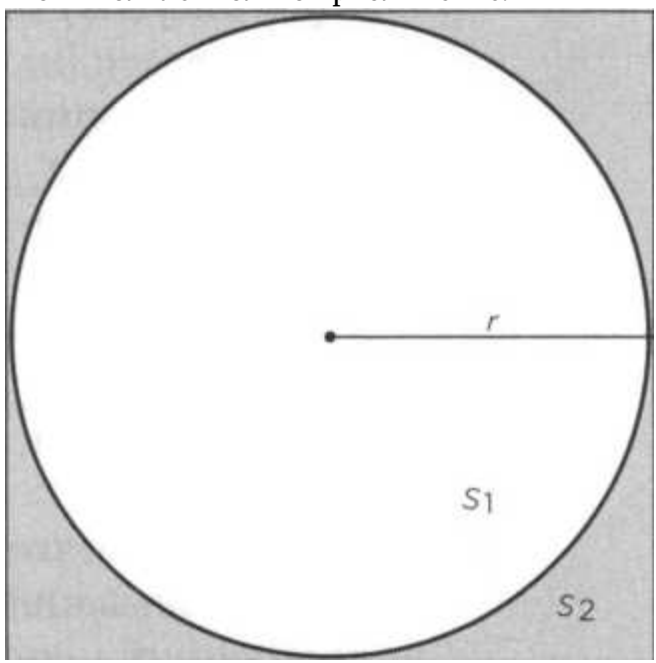
Архимед продолжил удваивать число углов дальше и в конце концов дошел до многоугольника с 96 сторонами! Это позволило ему доказать, что значение площади круга лежит между 3 + 10/71 и 3 + 1/7:

«Окружность любого круга составляет три его диаметра и еще

менее 1/7 и более 10/71 его части» («Об измерении круга», утверждение 3):

$3 + 10/71 < S_c < 3 + 1/7$, то есть, $3{,}1408 < S_c < 3{,}14029$.

Таким образом, площадь круга с радиусом 1 составит 3,14, с точностью до двух знаков после запятой. Тут важно отметить: Архимед знал, что он вывел неточное значение. Ведь помещая площадь между двумя разными значениями, ученый прекрасно понимал, что выполняет только приближение.



Окружность в квадрате

Согласно еще одному интересному рассуждению, которое можно найти в трактате «Об измерении круга», площадь вписанного в квадрат круга относится к площади этого квадрата как 11/14. И в данном контексте мы тоже приходим к тому же значению π — приблизительно 3,14. Рассмотрим следствие из этого положения. Во- первых, давайте внимательнее посмотрим на чертеж справа.

Площадь круга: $S_{круга} = \pi r^2$.

Площадь квадрата: $S_{квадрата} = (2r)^2 = 4r^2$.

Соотношения, которые их связывают:

площадь круга/площадь квадрата $= \pi r^2/4r^2 = \pi/4$

То, что выяснил Архимед:

площадь круга/площадь квадрата $= 11/14$

Очевидно, что это одна и та же величина, и мы помним, что все выкладки Архимеда приблизительны:

$\pi/4 \sim 11/14 \sim 3.14$

Доказательство от противного

В трактате «Об измерении круга» утверждается:

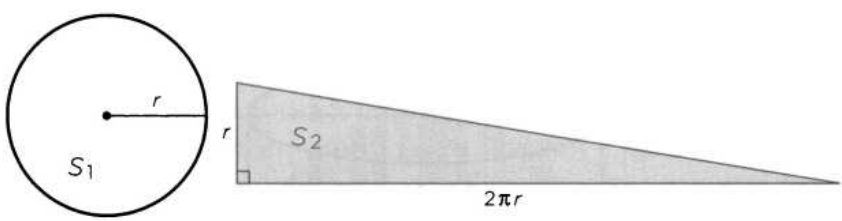
Каждый круг равен прямоугольному треугольнику, один из катетов которого равен радиусу круга, а другой — длине окружности.

Имеется в виду равенство их площадей. Для доказательства (см. рисунок) ученый приводит следующие соображения.

— «Предположим, что площадь круга больше площади треугольника: $S_{круга} > S_{треугольника}$». Архимед показывает, что такое неравенство невозможно.

— «Предположим, что площадь круга меньше площади треугольника: $S_{круга} < S_{треугольника}$». Архимед доказывает, что невозможно и это.

— Учитывая, что площадь круга не может быть ни меньше, ни больше площади треугольника, они должны быть равны: $S_{круга} = S_{треугольника}$.



Пользуясь нынешним алгебраическим языком, вышесказанное можно доказать гораздо легче:

— $S_{круга} = \pi r^2$.

— $S_{треугольника}$ = (основание • высота)/2 = $2\pi r * r/2 = \pi r^2$

— Что означает: $S_{круга} = S_{треугольника}$.

Пусть это изобразят на моем надгробии!

В утверждении 34 трактата «О шаре и цилиндре» содержится результат, которым, как нам точно известно, более всего гордился Архимед:

Соотношение объемов цилиндра и вписанного в него шара равно 3/2. Соотношение площадей поверхности цилиндра и вписанного в него шара также равно 3/2 (см. рисунок):

$V_{цилиндра}$ 3/2 $V_{шара}$

$S_{цилиндра}$ = 3/2 $S_{шара}$

Он смог найти абсолютно точное отношение между объемами шара и цилиндра, в который тот вписан. Речь идет о случае, когда диаметр шара равен как диаметру основания цилиндра, так и его высоте. Объем цилиндра получается в полтора раза (3/2) больше объема шара. Такое же соотношение и у площадей их поверхностей. Как мы уже говорили, Архимед даже завещал выбить изображение шара, вписанного в цилиндр, на своем надгробном памятнике вместо эпитафии. В I веке до н. э. Цицерону, по его словам, удалось увидеть это надгробие. До нашего времени оно, к сожалению, не дошло.

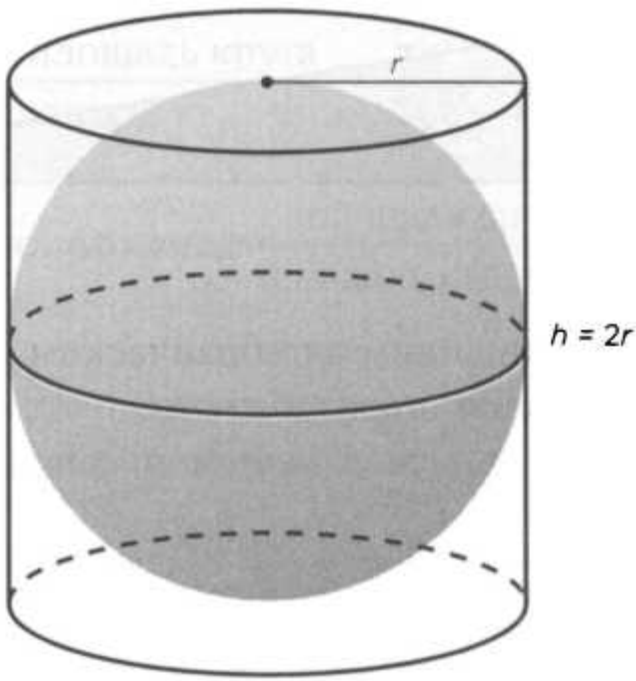


РИС.3

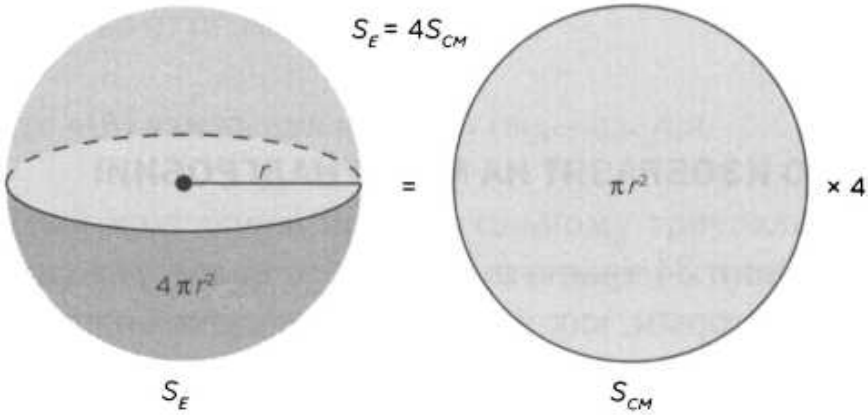


РИС. 4

Чтобы получить нужный результат, Архимед использовал различные определения, постулаты и утверждения, попутно найдя важные соотношения площадей других фигур. «О шаре и цилиндре» — это трактат, состоящий из двух книг, написанных в разные годы его жизни. Первая книга служит теоретической основой для второй, представляющей собой ответы на вопросы Досифея, которому она и посвящена. Первая книга заключает в себе 44 утверждения, шесть определений и пять постулатов. Кроме того, некоторые утверждения содержат важные следствия: например, рассматриваемое соотношение между шаром и цилиндром представлено в форме следствия из двух утверждений. Речь идет об утверждениях 33 и 34.

«Утверждение 33. Поверхность любого шара в четыре раза больше площади его большого круга» (рисунок 4).

Большой круг — это круг, который делит шар на две равные половины. Данное утверждение (рисунок 4) можно пояснить следующим умозрительным образом. Если мы сложим четыре раза площадь S_{CM} большого круга ($S_{CM} = \pi r^2$), то сумма будет равна площади поверхности всего шара S_E ($S_E = 4\pi r^2$). Это означает, что потребовалось бы равное количество краски, чтобы покрасить поверхность шара и четыре больших круга.

«Утверждение 34. Любой шар [по объему] в четыре раза больше конуса, база которого равна большому кругу, а высота — радиусу шара».

В алгебраической записи показать данное соотношение объемов можно так (рисунок 5). Объем V_c конуса с радиусом r и высотой r равен

$Vc = 1/3\pi r^3$

а объем шара V_E с радиусом r равен

$V_E = 4/3\pi r^3$.

Таким образом: $V_E = 4\ V_c$. То есть объем шара с радиусом r равен объему четырех конусов с радиусом основания r и высотой r. Другими словами, чтобы наполнить весь шар с радиусом r 4 л воды, потребуются 4 конуса с радиусом r и высотой r, вмещающие по 1 л каждый.

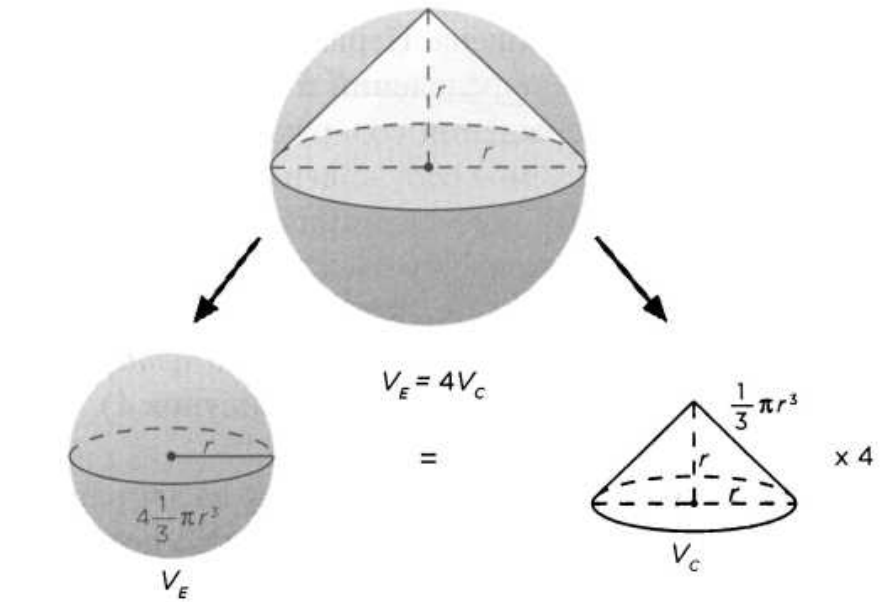


РИС. 5

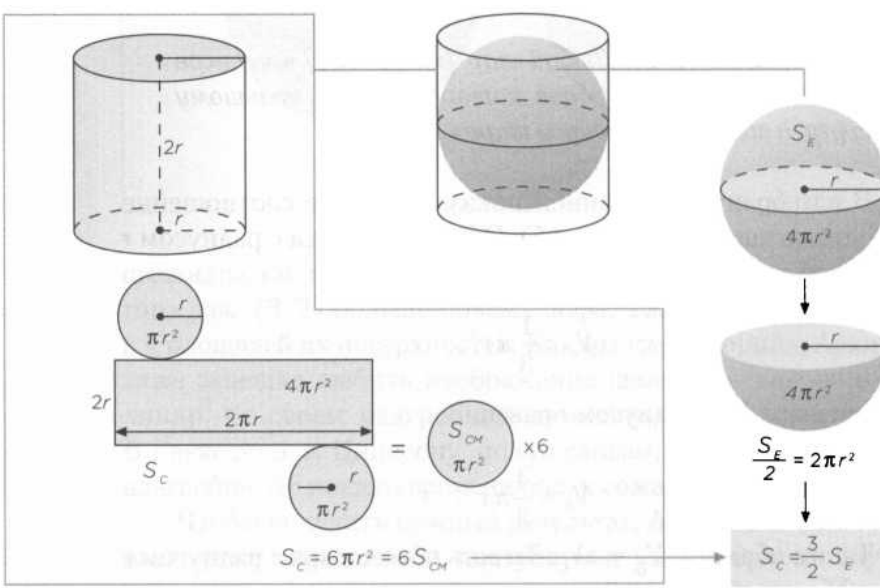


РИС. 6

В качестве следствия из утверждения 34 Архимед выводит заключение, упомянутое в начале главы и действительное для объемов и площадей:

«Поверхность шара составляет 3/2 поверхности цилиндра с основанием, равным большому кругу шара, и высотой, равной его диаметру» (рисунок 6).

Чтобы вычислить площадь поверхности цилиндра, надо сложить площади его боковой поверхности и двух оснований. Боковая поверхность равна по площади прямоугольнику с основанием 2кг и высотой 2r. Следовательно, ее площадь будет составлять $4\pi r^2$.

С другой стороны, два основания представляют собой круги с радиусом r, так что площадь каждого равна πr^2. Сложив площади боковой поверхности и удвоенную площадь основания, получаем площадь поверхности цилиндра: $S_c = 6\pi r^2$.

Итак, из расчетов следует, что площадь цилиндра равна шести площадям круга с таким же радиусом. И значит, один шар равен четырем кругам, а шесть кругов — полутора шарам. Нам понадобится одинаковое количество краски, чтобы покрасить шесть кругов радиусом r, полтора шара радиусом r или один цилиндр с радиусом основания r и высотой 2r. Надо прибавить, что полученные отношения действительны также и для объемов, то есть объем цилиндра составляет 3/2 объема вписанного в него шара (рисунок 7).

Легче и нагляднее представить себе это соотношение следующим образом: если один шар вмещает 2 л воды, то в описанный вокруг него цилиндр войдет 3 л.

Вот почему часто говорят, что отношение цилиндра к шару — три к двум.

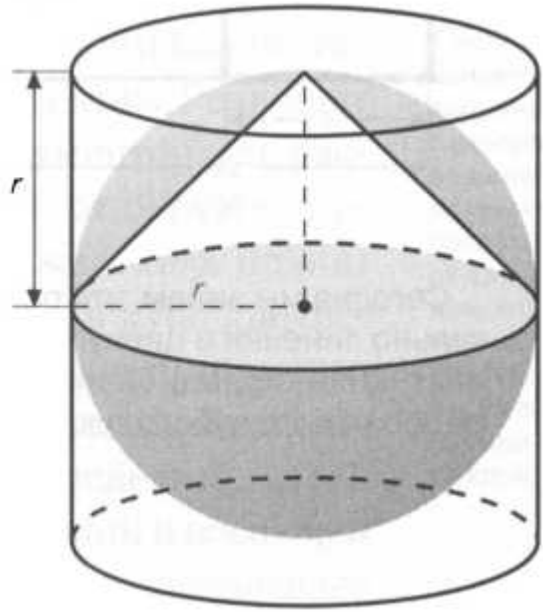
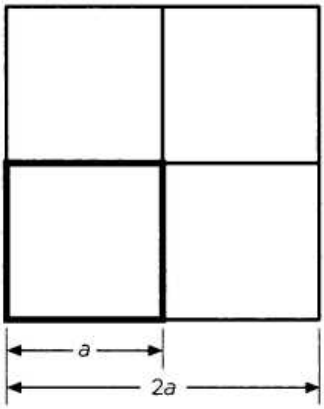
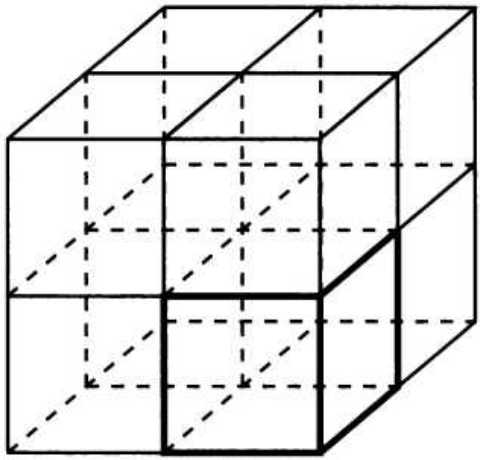


РИС. 7

ДЕЛОССКАЯ ЗАДАЧА

В V веке до н. э. Афины опустошила эпидемия чумы, одной из жертв которой стал знаменитый Перикл (495-429 гг. до н. э.), афинский политический деятель, которому удалось собрать в Афинах множество талантливых людей со всех концов греческого мира. Тогда группа афинян решила идти к оракулу Аполлона в Дельфах, чтобы узнать, как можно остановить чуму. По преданию, полученный ответ был таков: надо сделать новый кубический алтарь взамен старого так, чтобы по объему он был ровно в два раза больше. В этой легенде — в одном из двух ее вариантов — ставится знаменитая задача удвоения куба, известная как «делосская задача»: как построить куб объемом в два раза больше заданного, используя только линейку и циркуль. Из книги Архимеда «О шаре и цилиндре» понятно: он вполне осознавал, что для удвоения куба невозможно идти по интуитивно напрашивающемуся пути — просто удвоить его ребро. Ведь если ребро куба $I_1 = a$, его объем будет составлять $V_1 = a^3$; удвоив же ребро $I_2 = 2a$, мы получим объем нового куба $V_2 = (2a)^3 = 8a^3$, а это значит, что $V_2 = 8V_1$. Объем куба не удвоился, а «увосьмерился», как показано на рисунке.





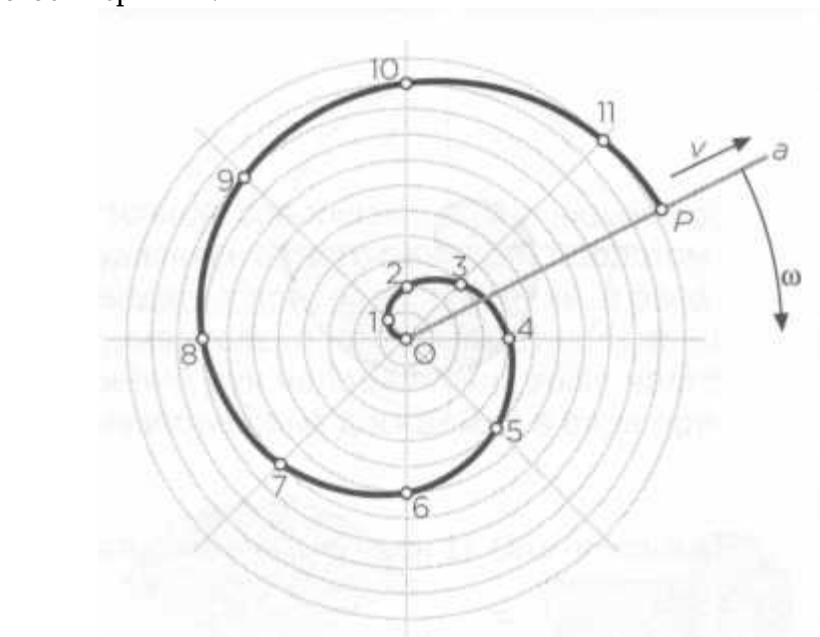
Сегодня мы знаем, что решить «делосскую задачу» с помощью исключительно линейки и циркуля невозможно, потому что ее решение представляет собой иррациональное число. Так, чтобы удвоить куб с ребром a, ребро нового куба должно равняться

$$\sqrt[3]{2}a.$$

Спираль Архимеда

Спираль — это кривая, образованная точкой, которая удаляется от центра и одновременно вращается вокруг него. Архимед изучал особенный тип спирали, которая теперь известна именно как спираль Архимеда (см. рисунок), характеризующаяся способом своего построения:

Спираль Архимеда представляет собой кривую, образованную точкой, которая с постоянной скоростью удаляется от вершины луча, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг своей вершины.



Луч a вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω, в то же время точка P движется с постоянной скоростью V вдоль луча a. Простой способ нарисовать такую спираль — это разбить плоскость двумя перпендикулярными прямыми и провести биссектрисы получившихся прямых углов, а затем начертить концентрические окружности с центром на пересечении прямых и на равном расстоянии друг от друга. При вращении прямая проходит последовательно через пересечения прямых с окружностями.

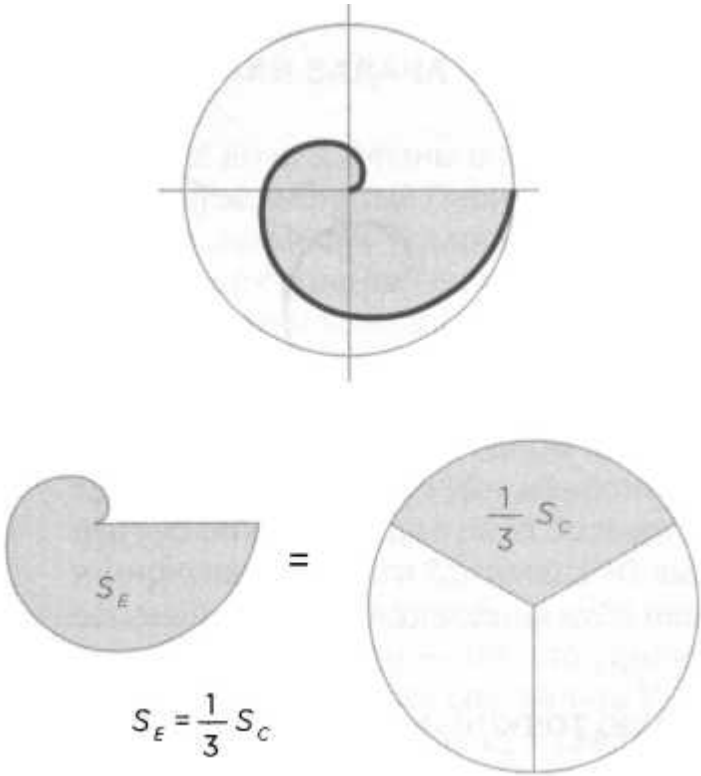
В трактате «О спиралях» Архимед изучает спираль, впоследствии получившую его имя, и некоторые из ее свойств. Данный текст считается одним из самых сложных трудов

древнегреческих мыслителей. Недаром в античности он оставался в забвении, а некоторые математики XVII — XVIII веков считали его ошибочным, поскольку оказались не в состоянии его понять. Его значимость заключается не только в его математических достоинствах, но и в философских аспектах. Речь идет в первую очередь о первом из известных документов, где рассматривается касательная к кривой, отличной от окружности. С математической точки зрения это очень важно, ведь поднятая Архимедом тема могла бы стать введением в курс дифференциального исчисления. Такое предположение становится очевидным, если учесть, что в своих доказательствах Архимед подошел почти вплотную к интегральному исчислению.

Трактат «О спиралях» состоит из 28 утверждений и посвящен Досифею Пелузийскому, которому адресовано и предваряющее основной текст письмо. Первые 11 утверждений — вспомогательные, Архимед использует их для доказательства других, более ему интересных. Такой метод работы характерен в целом для Архимеда — использовать предварительные утверждения как ступеньку для выхода на более высокий уровень. Он и сам в предисловии выделяет четыре наиболее важных результата и характеризует остальные как вспомогательные. После первых 11 утверждений Архимед приводит список из шести определений, и первое из них является собственно определением спирали Архимеда, которое мы излагали выше. Утверждения с 12-го по 20-е касаются свойств касательных к спирали, а также соотнесенности длины ее витков с оборотами, совершаемыми ею. В этой части работы Архимед показывает, как выстроить касательную к спирали в заданной точке. Наконец, в утверждениях с 21-го по 28-е Архимед рассматривает площади фигур, образованных кривой при последовательных оборотах, — данные утверждения представляют собой наиболее интересные результаты для исследователей. Учитывая сложность трактата, мы остановимся лишь на одном из них, под номером 24:

«Поверхность, ограниченная описанной спиралью при первом обороте, составляет третью часть круга, которого она касается».

Вышесказанное Архимед доказывает методом исчерпывания (см. рисунок), а также он использует доказательство от противного, заключив, что площадь образованной фигуры не может быть ни больше, ни меньше трети круга.



После первого оборота спираль ограничивает площадь, равную 1/3 площади окружности, в которую спираль вписана.

СПИРАЛИ

Спирали — это кривые, образуемые точкой, совершающей вращение вокруг некоего центра, одновременно удаляясь от него с каждым оборотом. Разнообразные спирали можно наблюдать в природе: у растений, в раковинах моллюсков и так далее — неудивительно, что математики давно заинтересовались ими. Среди творений рук человеческих тоже часто встречаются спирали — например, на виниловых дисках или в виде пружин. Вот некоторые типы спиралей:

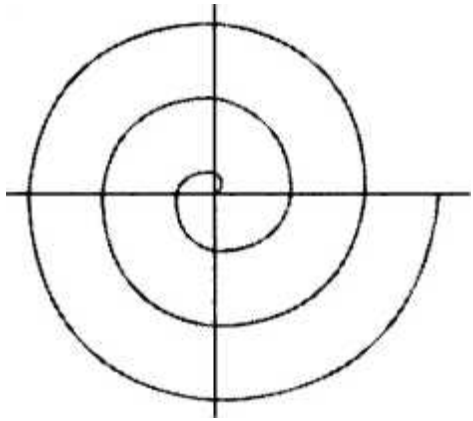


РИС. 1

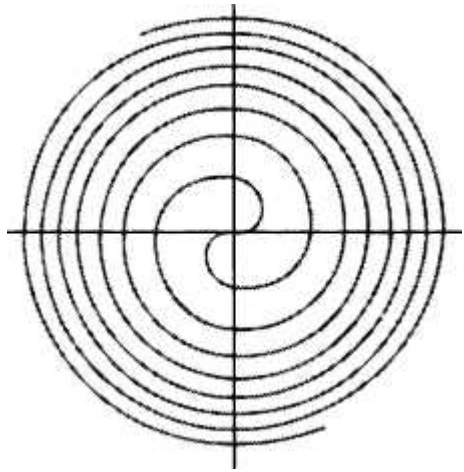


РИС. 2

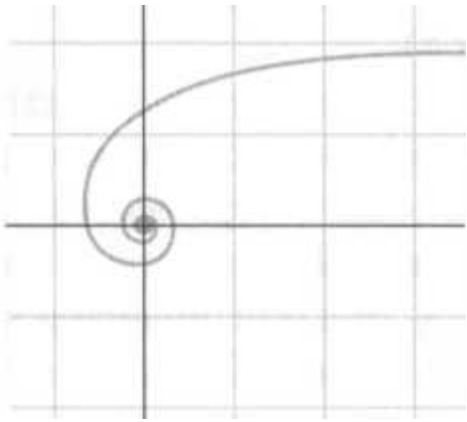


РИС.3

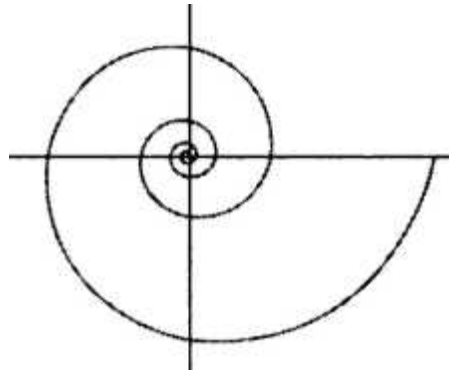


РИС. 4

— архимедова, или арифметическая спираль (рисунок 1). Она описывается уравнением $r = a + b\theta$;

— спираль Ферма, или параболическая спираль (рисунок 2): $r = \theta^{1/2}$;

— гиперболическая спираль (рисунок 3). Это инверсия архимедовой спирали, ее уравнение: $r = a/\theta$;

— логарифмическая, или изогональная спираль (рисунок 4): $r = \log_b(r/a)$.

Две древние проблемы

Тремя знаменитыми проблемами древности были удвоение куба, трисекция угла и квадратура круга. Некоторые специалисты утверждают, что глубинной целью, которую Архимед преследовал в своем трактате «О спиралях», было найти решение двух из этих задач. Действительно, с помощью спирали можно справиться с трисекцией угла и квадратурой круга, хотя при этом придется пренебречь одним из начальных условий. Задачу надо было решать исключительно с помощью циркуля и линейки, а построение спирали нуждается в кинематических операциях. В 1837 году французский математик Пьер Ванцель доказал невозможность трисекции угла и удвоения куба при помощи только линейки и циркуля. Потом в 1882 году немецкий математик Фердинанд фон Линдеман доказал, что π — иррациональное число, а следовательно, и решение задачи квадратуры круга с помощью этих инструментов тоже невозможно. Если же выйти за пределы условий и применить архимедову спираль, то трисекцию угла можно выполнить следующим образом (рисунок 8).

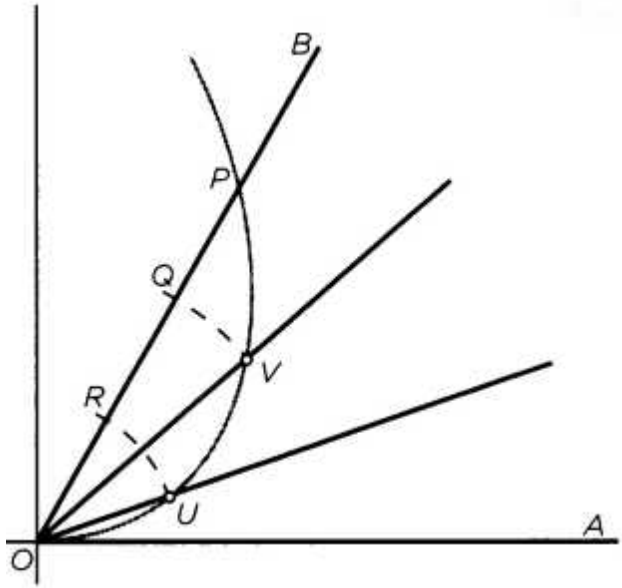


РИС. 8

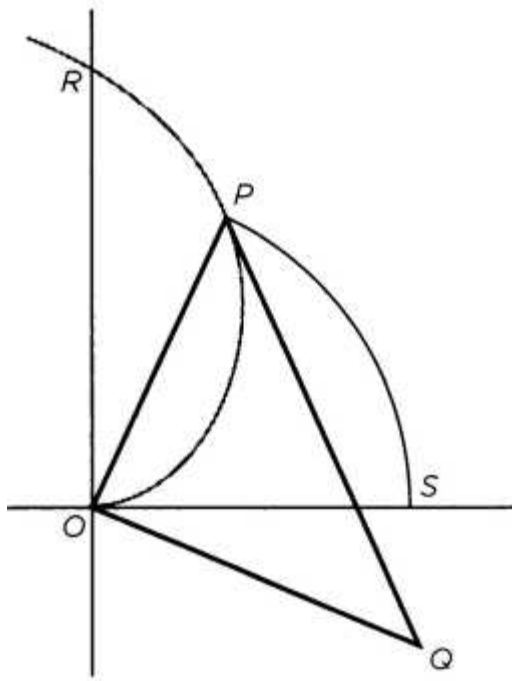


РИС. 9

— Угол, который предстоит делить, образован лучами ОА и ОВ.

— Луч О А вращается вокруг точки О, по нему равномерно перемещается точка Р, образуя таким образом архимедову

спираль.

— При совпадении лучей OA и OB отрезок OP делится на три равные части точками R и Q.

— Проводятся окружности с центром O и радиусами OR и OQ которые пересекают спираль соответственно в точках U и V.

— Проводятся лучи из точки O, проходящие через U и V. Так мы получили трисекцию угла.

Задача о квадратуре круга, которая заключается в требовании построить квадрат, равный по площади заданному кругу, тоже может быть решена с помощью архимедовой спирали, хотя и опять же с некоторым нарушением условий (рисунок 9).

— Через точку P проводится касательная к спирали PQ.

— Строится отрезок, соединяющий P и центр спирали O.

— Из точки O проводится перпендикуляр к отрезку OP до пересечения с прямой PQ в точке Q.

— Строится сегмент окружности PS с центром O и радиусом OP.

— Можно доказать, что отрезок OQ равен по длине кривой PS.

— Отсюда выводится, что касательная к спирали в точке R будет пересекаться с горизонтальной осью, причем длина отрезка, образованного точкой O и точкой пересечения касательной и оси, будет равна четверти длины окружности с радиусом OR.

— С учетом утверждения о площадях круга и прямоугольного треугольника (см. стр. 88) задача о квадратуре круга решена.

Квадратура параболы

В трактате «О квадратуре параболы» Архимед излагает различные теоремы, ранее, как он пишет во введении, еще не изученные. Это значит, что он их сформулировал сам. Из утверждений, изложенных Архимедом в данном труде, популярная литература чаще всего упоминает утверждение 24, касающееся квадратуры параболы:

«Площадь поверхности, ограниченной параболой и пересекающей ее прямой, на 1/3 больше площади треугольника с основанием, равным отрезку данной прямой и высотой, равной параболе» (рисунок 10).

Архимед послал эту работу Досифею Пелузийскому — это был первый труд, отправленный им кому бы то ни было после смерти его друга Конона Самосского. Трактат «О квадратуре параболы» содержит 24 утверждения. В первых пяти Архимед представляет некоторые свойства этой кривой; в утверждениях с 6-го по 16-е он проводит механический анализ параболы, основываясь на законе рычага. В утверждении 17 впервые говорится о его решении задачи квадратуры параболы с помощью механического метода, а в следующих утверждениях ученый использует метод исчерпывания, чтобы окончательно доказать правильность найденного решения (утверждение 24).

Таким образом, Архимед решает задачу квадратуры сначала механическим методом, а потом, считая его недостаточно строгим, добивается того же результата с помощью классического геометрического метода исчерпывания. Интересно отметить, что квадратура параболы является первой известной работой Архимеда, в которой тот применяет механический метод. Существует еще и третье решение этой квадратуры, которое содержится в трактате «О методе механических теорем».

Как уже говорилось, чтобы доказать утверждение 24, Архимед использовал метод исчерпывания (рисунок 11). Начинает он, принимая результат за данное, то есть с утверждения, что S_P — площадь параболы, S_T — площадь треугольника ABC, и тогда $S_P = 4/3\ S_T$. Шаги доказательства таковы.

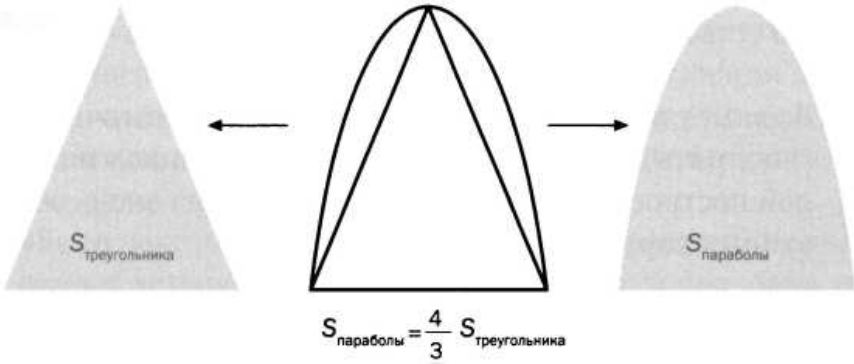


РИС. 10

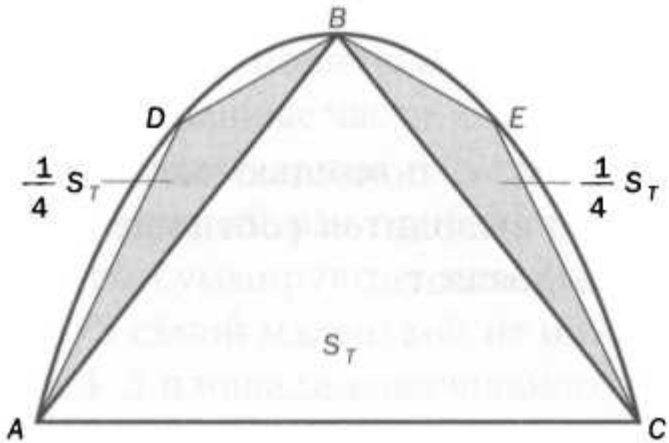


РИС. 11

— Провести хорду параболы (AC) и построить треугольник с основанием, совпадающим с этой хордой и третьей вершиной, совпадающей с вершиной параболы (B). При этом у параболы появляются еще две хорды AB и CB.

— Аналогично построить треугольники ADB и BEC.

— Такую операцию можно продолжать до бесконечности, причем получаемый многоугольник будет все более и более приближаться к параболе.

— В утверждении 21 доказывается, что каждый треугольник, построенный по такому принципу, имеет площадь, равную 1/4 от площади предыдущего треугольника. То есть получается $S_{ADB} = S_{BEC} = 1/4 S_{треугольника}$

— Архимед предположил, что мы можем достаточно долго заполнять пространство между треугольником и параболой построением новых треугольников на вновь образованных хордах.

— Основываясь на этой идее, он смог доказать, что площадь под параболой не может быть больше 4/3 площади изначального

треугольника, но не может она быть и меньше 4/3.

— Таким образом, с помощью метода доказательства от противного выводится соотношение $S_p = 4/3S_T$, что и требовалось доказать.

Складывая почти до бесконечности

Самый древний пример того, что можно считать провозвестником вычисления бесконечно малых величин, мы встречаем у Зенона Элейского (490-430 до н.э.). Рассмотренная им процедура (дихотомия, последовательное деление пополам) представляла собой прецедент для работы греческих математиков в последующие века.

Архимед вплотную подошел к идее пределов в различных своих работах, где он употреблял метод исчерпывания. Одна из таких работ — «О квадратуре параболы». Речь идет о том, что складывание бесконечного числа величин дает в результате конечное число. Хотя Архимед и не мог суммировать все слагаемые, ему, несомненно, удалось достичь удовлетворительного приближения к искомой сумме интуитивным способом. Эта сумма вычисляется в утверждении 23, предпоследнем пункте трактата, как раз перед утверждением, в котором второй раз в данном тексте представлена квадратура параболы. Опираясь на этот результат, он смог доказать решение задачи о квадратуре параболы методом доказательства от противного. В сущности, утверждение 23 служит базой для решения задачи, то есть его можно рассматривать как инструмент вычисления для достижения поставленной цели. Утверждение 23 гласит:

«Если некоторые величины соотносятся друг с другом как один к четырем, то сумма всех величин и еще одна треть самой маленькой величины составит четыре трети самой большой».

Объясним это более понятным образом. Берем квадрат и делим его на четыре равные части. Складываем квадрат с его четвертью. Четверть тоже делим на четыре части и так далее до бесконечности, каждый раз прибавляя четверть к предыдущей сумме. Затем суммируются площади всех этих частей и прибавляется 1 /3 самой маленькой из них. Результат всегда будет составлять 4/3 площади изначального квадрата (см. рисунки 12 и 13 на следующей странице; на рисунке 12 представлено только одно деление, а на рисунке 13 — все деления).

Как можно увидеть, результат всегда равен A + 1/3 A, то есть

сумма всех последовательных делений, проделанных указанным способом, равна 1/3 площади изначального большого квадрата. Здесь Архимед приходит интуитивным образом к следующему выражению, описывающему n делений квадрата:

$$A + \left[\frac{1}{4}A + \frac{1}{4^2}A + \cdots + \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}A\right] = A + \frac{1}{3}A = \frac{4}{3}A.$$

В наше время такая последовательность называется геометрической прогрессией, в которой каждый следующий элемент получается путем умножения предыдущего на определенное постоянное число, называемое знаменателем прогрессии. Общая формула геометрической прогрессии такова: $a_n = a_1 \cdot r^{(n-1)}$

В нашем случае имеем

$a_1 = A$

$r = 1/4 \rightarrow a_n = 1/(4^{(n-1)}) \cdot A.$

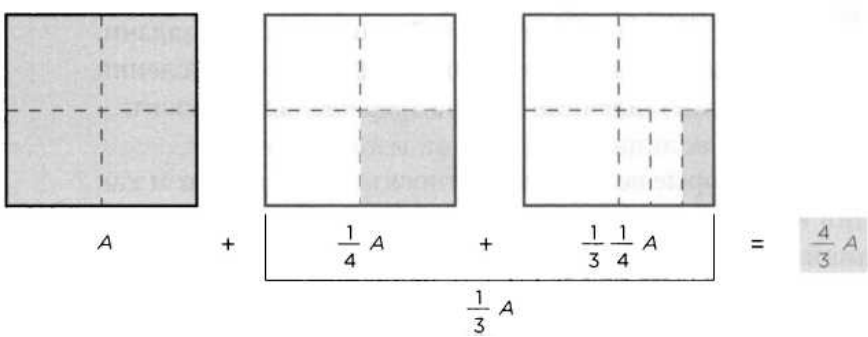


РИС. 12

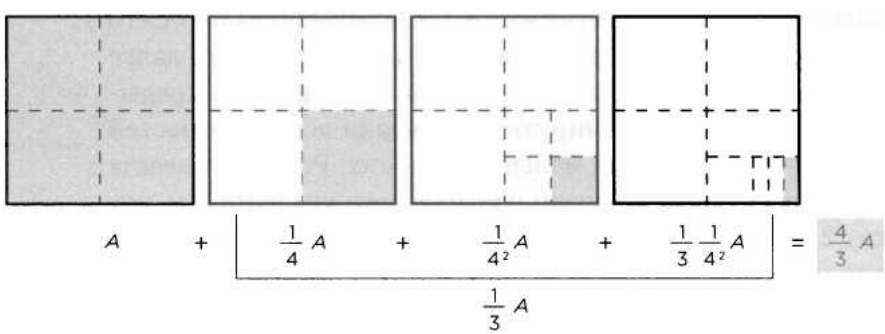


РИС. 13

Таким образом, подставив значения n, мы получаем все слагаемые последовательности:

$$A, \frac{1}{4}A, \frac{1}{4^2}A, \frac{1}{4^3}A\ldots$$

Можно сложить все элементы данной бесконечной последовательности, учитывая, что эта последовательность сходящаяся, с помощью формулы для суммы бесконечной убывающей геометрической последовательности:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{3}{4}} \quad \rightarrow \quad S_\infty = \frac{4}{3}A.$$

Как видите, это значение, которое получил Архимед, не пользуясь нашими формулами. Каким-то образом он заметил, что где бы ни прервать последовательность, остаток ее будет составлять 1/3 от того слагаемого, на котором последовательность была прервана, независимо от того, что это было за слагаемое. Неизвестно, как он пришел к такому выводу. Возможно, что результата, представленного в трактате, ученый добился просто методом проб и ошибок. Главное, что он смутно предвидел принцип предела и остановился в одном шаге от него со своим методом, применяемым до сих пор для нахождения общей формулы рекуррентной последовательности.

<table>
<tr><td>Слагаемое</td><td>a_1</td><td>a_2</td><td>a_3</td><td>…</td><td>a_n</td><td>Остаток до бесконечности</td></tr>
<tr><td>Значение слагаемого</td><td>A</td><td>$\frac{1}{4}A$</td><td>$\frac{1}{4^2}A$</td><td></td><td>$\frac{1}{4^n}A$</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">Сумма</td><td>$A+$</td><td colspan="3">$\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\cdots+\frac{1}{4^n}A+$</td><td></td><td>$\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}A$</td></tr>
<tr><td>$A+$</td><td colspan="4">$\frac{1}{3}A$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="6">$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{(n-1)}}A=\frac{4}{3}A$</td></tr>
</table>

Задача о быках

При чтении данной книги легко заметить, что выбранный стиль изложения весьма близок к научной статье, ведь ее аудитория явно интересуется математикой более, чем это можно ожидать от среднестатистического читателя. Однако «Задача о быках» выбивается из нашего стиля, поскольку изложена в виде стихов. Некоторые специалисты даже подвергали сомнению ее авторство, не только, впрочем, из-за ее поэтической формы, но и из-за самого содержания. И действительно были основания сомневаться в том, что Архимед мог решить данную задачу сам, хотя его операции с большими числами с помощью мириад проливают некоторый свет на возможные для ученого пути ее решения. Эта маленькая работа представляет собой 28 элегических дистихов, основанных на стихах Гомера. Состоящий из двух строк дистих — обычная форма для древнегреческой поэзии. Манускрипт был найден в 1773 году немецким поэтом Готхольдом Эфраимом Лессингом в герцогской библиотеке Вольфенбюттеля (Германия).

АХИЛЛЕС И ЧЕРЕПАХА

Зенон Элейский был греческим философом элейской школы и прославился своими парадоксами. Один из самых известных — это парадокс об Ахиллесе и черепахе. В нем говорится об ахейском воине Ахиллесе, столь хорошем бегуне, что его звали быстроногим. Зенон описывает довольно своеобразное состязание: соревнование между Ахиллесом и черепахой. Он предположил, что земноводное медленнее героя в два раза. Гордый Ахиллес дал черепахе фору в половину дистанции. Как говорит Зенон, когда Ахиллес достиг середины пути, черепаха уже успела проползти его четверть, то есть половину того расстояния, которое ей надо было преодолеть. Таким образом ситуация возвращается к своему началу: когда Ахиллес добегает до точки старта черепахи, она продвигается еще дальше, и так до бесконечности, следовательно выходит, что герой не догонит ее никогда. Архимед нашел ответ на этот парадокс, хотя и не сумел придать ему математическое оформление: сумма бесконечного количества слагаемых может оказаться конечным числом, то есть не бесконечностью. Говоря иначе, Зенон из Элеи не располагал

таким важнейшим математическим инструментом, как исчисление бесконечно малых величин. Ахиллес догонит черепаху, потому что хотя отрезок можно делить на бесконечное число фрагментов, но, учитывая, что эти фрагменты все более мелкие, сумма их представляет конечное число. В наше время проблема обычно представляется в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots = 1.$$

Когда Ахиллес достигнет позиции AB/2, где сначала находилась черепаха, она уже будет в точке AB/4. В тот момент, когда Ахиллес добежит до позиции AB/4, которую занимала черепаха, она будет уже в AB/B и так далее.

Скоро потом ты увидишь Тринакрию остров;

Издавна Гелиос тучных быков и баранов пасет там на пышных,

Искусство нарезки параболоидов

В трактате «О коноидах и сфероидах» Архимед исследует тела, образованные сечением фигур вращения. Этот текст также предваряется письмом Досифею, в котором дается краткое резюме того, что адресат найдет в книге, — типичное вступление для Архимеда. После начальных определений и одной леммы видим 32 утверждения.

Параболоид (рисунок 14) — это трехмерная фигура, образованная вращением параболы вокруг своей оси; гиперболоид (рисунок 15) — трехмерная фигура, образованная вращением вокруг своей оси гиперболы; а эллипсоид (рисунок 16) — трехмерная фигура, которую образует вращающийся вокруг своей оси эллипс.

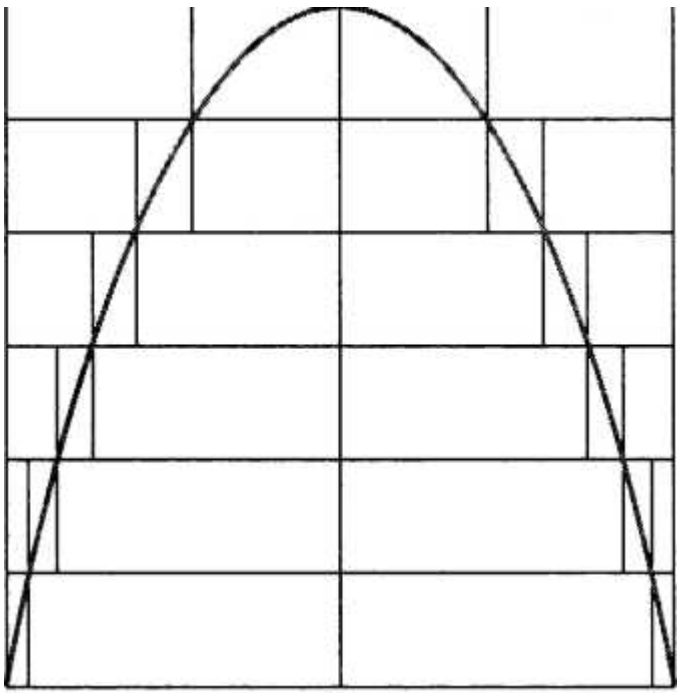


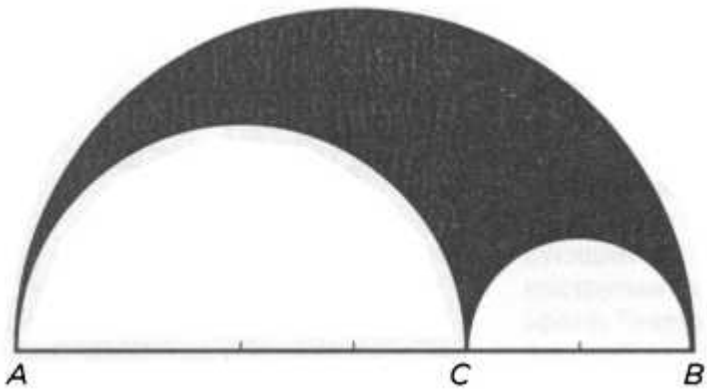
Иллюстрация утверждения 19 из трактата «О коноидах и сфероидах». Здесь можно видеть, как вписывается в параболоид и описывается вокруг него множество цилиндров одинаковой высоты.

Первые 20 утверждений носят вспомогательный характер. Утверждения 21-32 представляют собой самую важную часть трактата. В трактате «О коноидах и сфероидах» даются начала интегрального исчисления. Вводятся базовые принципы

вычисления объемов криволинейных фигур вращения. Тем не менее до самого понятия интегрирования дело не дошло, потому что еще не была сформулирована концепция предела. Таким образом, основная идея текста состоит в приведении фигур вращения ко все более маленьким цилиндрам, как можно полнее вписывающимся в их объем (исчерпывание) или как можно ближе «облегающим» их снаружи (сжатие). Архимедов метод исчерпывания предстает здесь во всем своем блеске. Ученому нужно показать, что он может эффективно ограничить параболоид изнутри и снаружи. Это он и делает в утверждении 19: «Можно вписать в параболоид и описать вокруг него две фигуры, состоящие из цилиндров одинаковой высоты, так, чтобы описанная фигура превышала по объему вписанную на величину, меньшую любой заранее заданной». Это значит, что параболоид вписывается в «стопку» цилиндров-дисков» одинаковой толщины (узкие уплощенные цилиндры, ширина которых больше высоты, как у таблеток). И еще одна «стопка» цилиндров той же высоты вписывается в параболоид изнутри. Таким образом, объем параболоида будет больше общего объема вписанных в него цилиндров и меньше объема описанных. Как показано на рисунке, чем больше число таких «дисков» (при уменьшении их высоты), тем более приближается их общий объем к искомой величине. Принцип тут весьма похож на тот, что использовался при решении задачи квадратуры круга.

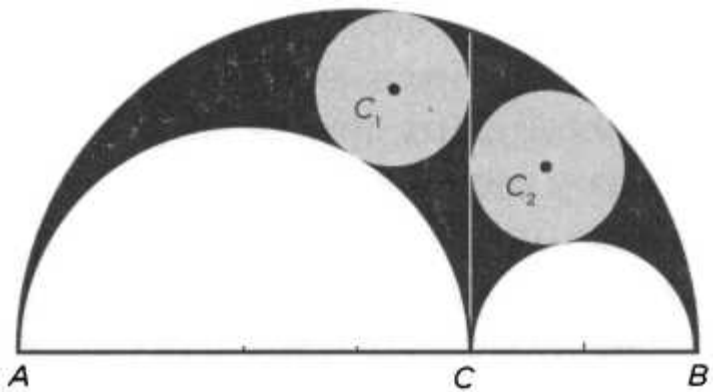
Сапожный нож и солонка

Трактат, известный как «Книга лемм», отличается от других трудов Архимеда одной важной особенностью: у нас нет его греческого текста. Он дошел до наших дней только благодаря переводу на арабский язык, который сделал астроном, математик и переводчик IX века Сабит ибн Курра. Таким образом, у нас есть единственное свидетельство того, что это действительно труд Архимеда, — факт, который вызывает некоторые сомнения в его авторстве. Данная книга считается учебником из-за элементарности или вторичности многих содержащихся в ней утверждений. В частности, утверждение 7 гласит, что площадь круга, описанного вокруг квадрата, в два раза больше площади круга, вписанного в него. Текст состоит из 15 утверждений, причем в нем упоминается и сам Архимед: например, в утверждении 4, где представлена геометрическая фигура арбелос, что по-гречески означает «сапожный нож», так как она формой напоминает этот инструмент. Арбелос представляет собой область плоскости, ограниченную тремя касающимися друг друга половинами окружностей. На приведенном здесь рисунке арбелос соответствует затемненной части. У этой фигуры есть некоторые любопытные свойства, которые можно было бы включить в начальный курс геометрии. Возможно, самая интересная из них — это так называемые «круги-близнецы Архимеда» (см. рисунок на следующей странице): из точки C достраивается перпендикуляр к прямой AB до пересечения с окружностью наибольшего диаметра. Данный перпендикуляр делит арбелос на две фигуры. Затем в каждую из этих получившихся фигур вписываются окружности C1 и C2 так, чтобы они касались с двух сторон перпендикуляра и каждая из них касалась большой и малой окружности.



В утверждении 5 говорится, что площади этих кругов будут равны ($S_{C1} = S_{C2}$), независимо от местоположения точки C, отчего они и называются кругами-близнецами Архимеда. Существуют и другие круги, связанные с арбелосом, они тоже носят личные имена — круг Аполлония, круг Паппа и круг Банкофа.

Еще одна фигура, представленная в «Книге лемм», называется салинон, что согласно интерпретации историка математики Томаса Хита означает «солонка». В утверждении 14 даются указания, как построить эту фигуру, и вновь встречается имя Архимеда. То, что он неоднократно упоминается в данном трактате, говорит об учебном характере книги. Инструкции же, которые даются в ней для постройки салинона (рисунок 17 на стр. 116), таковы.



— Проводится отрезок прямой AB, и в его середине отмечается точка O.

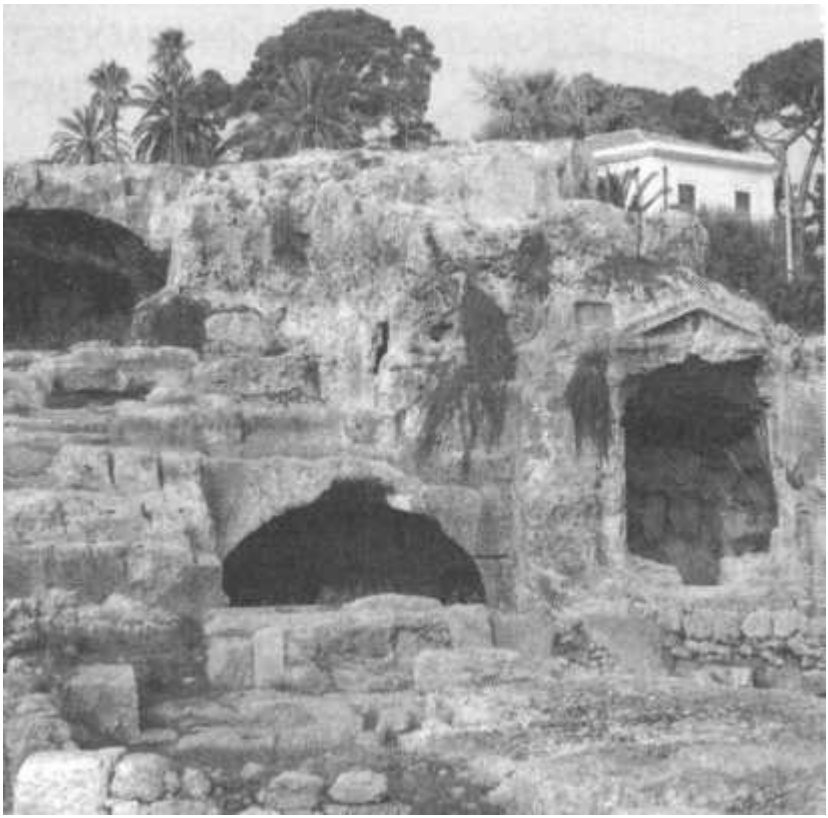
— Строится полуокружность, диаметр которой равен отрезку AB.

— На отрезке AB строятся еще две полуокружности равного диаметра (меньшего, чем половина отрезка) так, чтобы они касались первой полуокружности в точках A и B.

— Получаются полуокружности с диаметрами AD и EB и центрами соответственно в точках G и H.

— Строится полуокружность с диаметром DE в сторону, противоположную двум предыдущим, замыкая таким образом фигуру.

— Фигура, замкнутая построенной линией из четырех полуокружностей, и есть *салинон*.



Место предполагаемой могилы Архимеда в Сиракузах на Сицилии.

В 1965 году вычисление наименьшего из возможных решений задачи о быках заняло у компьютера IBM 7040 7 часов 49 минут (фото: Columbiana photo archive).

В «Книге лемм» Архимед представляет геометрическую фигуру «арбелос» (сапожный нож), названную так из-за сходства с соответствующим инструментом (фото: Thomas Schoch).

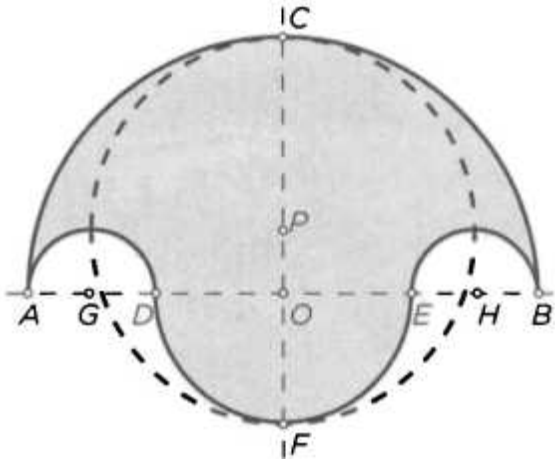


РИС. 17

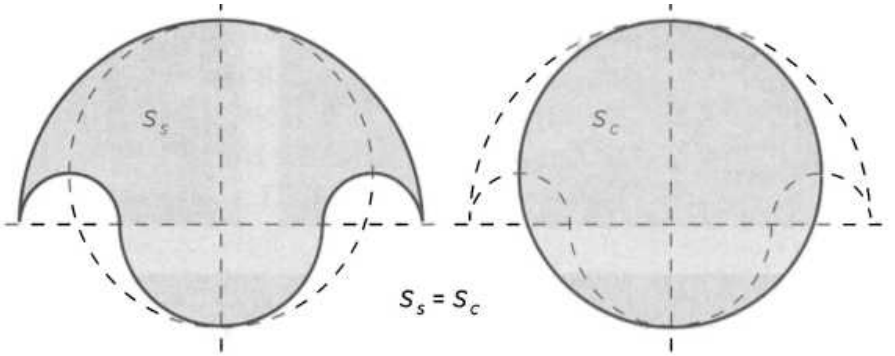


РИС. 18

Интересно отметить, что при представлении *салинона* Архимед в том же утверждении описывает следующее его свойство.

— Проводится прямая, перпендикулярная AB и проходящая через точку O.

— Эта прямая пересекает границы *салинона* в точках C и F.

— Берется точка P, представляющая собой середину отрезка CF, и строится окружность с центром P и диаметром CF.

— Можно доказать, что площадь *салинона* равна площади круга с диаметром CF и центром P (рисунок 18).

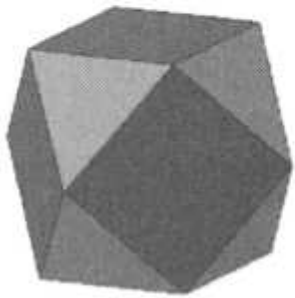
Трехмерные архимедовы фигуры

К сожалению, до нас не дошел трактат «О правильных многогранниках», в котором, по- видимому, Архимед подробно описывал трехмерные тела, носящие в наше время его имя. Однако мы знаем о них благодаря александрийскому математику Паппу. В книге V своего «Математического собрания» он пишет:

«Хотя можно придумать множество многогранников самых разных видов, более всего заслужили внимание многогранники, которые имеют правильную форму. Таковы не только фигуры, найденные великим Платоном, то есть тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и пятый — икосаэдр, но и 13 многогранников, открытых Архимедом, сложенные из правильных, но не одинаковых многоугольников с равными сторонами и равными углами».

Плосконосый додекаэдр

Усеченный куб



Кубооктаэдр

Усеченный октаэдр

РИС. 19

Архимедовы тела, примеры которых приводятся на рисунке 19, — это 13 выпуклых многогранников, которые по большей части получаются из Платоновых тел «срезанием углов»: усеченный куб, усеченный тетраэдр, малый ромбокубооктаэдр, большой ромбокубооктаэдр, усеченный октаэдр, усеченный додекаэдр, усеченный икосаэдр, плосконосый куб, кубооктаэдр, малый ромбоикосододекаэдр, большой ромбоикосододекаэдр, икосододэкаэдр и плосконосый додекаэдр.

ГЛАВА 4
Военный инженер

Греческий мир в эпоху Архимеда был охвачен желанием понять и покорить окружающую природу. Для этой цели требовалось создавать разнообразные машины, все более и более сложные, будь то устройства открытия ворот, или подъемные механизмы для больших грузов, или более совершенные корабли. Именно в таких обстоятельствах математика, находившаяся на тот момент в расцвете, открыла дорогу инженерному искусству.

Архимед известен скорее в связи со своими машинами и техническими новшествами, чем с тем вкладом, который он внес в математику. Любопытно, что как раз о машинах, изобретение которых ему приписывается, он не написал ни строчки, по крайней мере мы об этом ничего не знаем. И тем не менее существует множество упоминаний о них в различных источниках, поэтому можно считать более-менее установленным фактом, что именно Архимед был их автором. Как уже говорилось, возможно, именно математики той эпохи уделяли наименьшее внимание технике, хотя ее развитие в античности шло довольно интенсивно.

Из рассказа об осаде Сиракуз становится ясно, что Архимед был очень талантливым механиком и инженером. Например, свои разработки в области рычага он использовал при конструировании и модернизации катапульты, а также в сложных системах блоков.

Сведения об изобретениях сиракузского мудреца не лишены мифологических и легендарных элементов: некоторые авторы даже рассказывают о применении им так называемых зажигательных зеркал, лучи которых смогли поджечь римский флот. Здесь мы еще раз обратимся к некоторым источникам, упомянутым в первой главе, чтобы привести библиографические ссылки на обсуждаемые механизмы.

АЛЕКСАНДРИЙСКИЕ МАШИНЫ

История инженерной мысли восходит к самим истокам возникновения человечества, если под инженерией понимать использование инструментов для улучшения человеческой жизни.

И все же именно ко времени Архимеда нам следует отнести начало научной инженерной деятельности, которая заключается в применении геометрических знаний к явлениям физического мира и в постройке различных механизмов. Филон Византийский (280-220 до н. э.) писал свои трактаты на койне, общегреческом диалекте того времени, чтобы его могли понять все интересующиеся специалисты. В своем труде «О метательных машинах» он анализирует устройство катапульты, исходя из веса метаемого снаряда и запасенной упругим элементом энергии. Герои Александрийский заимствовал некоторые идеи Архимеда, уточнив, к примеру, законы рычага и практически предвосхитив третий закон Ньютона — закон о действии и противодействии. Это привело к созданию им первой паровой турбины, известной как «эолипил» и состоявшей из закрытого шарообразного сосуда с двумя изогнутыми трубками: вырываясь из них, пар заставлял машину быстро вращаться. С практической точки зрения паровая машина Герона была всего лишь одним из модных автоматов той эпохи. Архимед же направил свои силы на математическое обоснование, необходимое для конструирования и постройки некоторых из подобных машин.

Видимо, Архимед использовал свой талант не только в военной области, но и в других сферах жизни: например, он сконструировал систему для подъема воды, известную теперь как архимедов винт, о которой мы еще поговорим.

АРХИМЕД В ФИЛАТЕЛИИ

Великих исторических деятелей часто увековечивают на изображениях почтовых марок, и Архимед — не исключение. Приведем несколько примеров таких марок.

A: Италия. Дата выпуска: май 1983 года. Хотя изображение на марке заявлено как бюст Архимеда из неаполитанского Национального музея, на самом деле это бюст Архидама III. Здесь же изображен архимедов винт. B: Греция. Дата выпуска: апрель 1983 года. Эта картинка — перерисовка ренессансной мозаики, посвященной смерти Архимеда. Однако лицо у известного ученого такое же, как и на итальянской марке. Обратите внимание на равноплечные весы, символизирующие закон Архимеда.

C: Сан-Марино. Дата выпуска: апрель 1982 года. Забавно, что и здесь мы видим все то же изображение царя Архидама III. В правом верхнем углу находятся геометрические фигуры, которые древнегреческий ученый велел выбить на своем надгробии.

D: Гвинея-Биссау. Дата выпуска: 2008 год. Лицо снова чужое, то же самое, что и на предыдущих марках. В глубине — астероид, названный именем Архимеда.

E: Никарагуа. Дата выпуска: 1971 год. Марка посвящена закону рычага. F: Испания. Дата выпуска: 1963 год. Репродукция картины испанского художника Хосе де Риберы (1591-1652), хранящейся в музее Прадо в Мадриде.

A

EUROPA
ARCHIMEDE
ITALIA
500

B

EUROPA CEPT 1983
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ 80

C

ARCHIMEDE 287-212 a.C.
SAN MARINO
20

D

GUINÉ-BISSAU
Archimedes
(287 BC – 212 BC)
3500

E

NICARAGUA
AEREO
2
CORDOBAS

F

CORREOS
25
CTS
ESPAÑA

Гигантская «сиракузия» и архимедов винт

Греческий писатель Афиней Навкратийский (ок. 200) рассказывает в своей книге «Пир мудрецов», что тиран Гиерон II поручил Архимеду спроектировать огромный корабль, около 55 м длиной, принимающий на борт до 600 человек. Судно получило имя «Сиракузия» в честь одноименного города, а его постройку и отделку приписывают Архию Коринфскому.

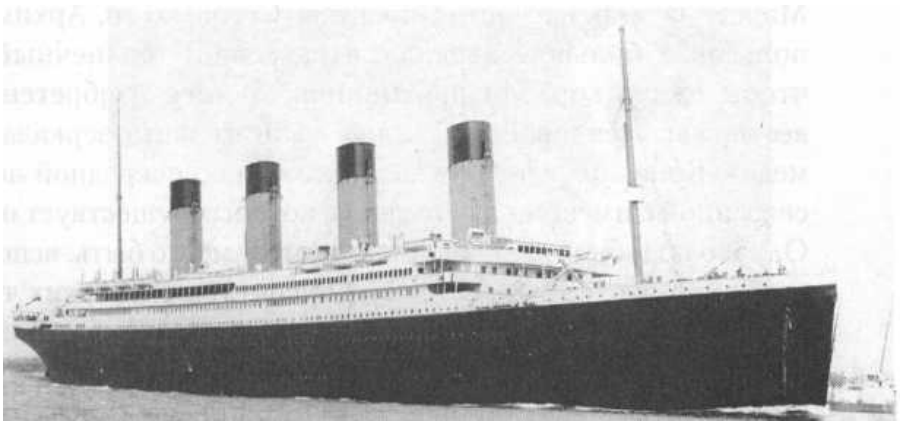
Что касается корабля, построенного Гиероном, тираном Сиракуз, за изготовлением которого следил Архимед, то я не могу обойти его молчанием, ведь человек по имени Мосхион написал следующее:«[…]».

Афиней о постройке «Сирлкузии». Далее в тексте детально описываются характеристики корабля.

«Сиракузия» отличалась такими размерами, что вмещала декоративные сады, палестру, библиотеку и храм, посвященный богине Афродите. Когда корабль с грузом зерна был послан в качестве подарка египетскому царю Птолемею III, его название изменили на «Александрию». «Сиракузию» можно назвать « Титаником» древности, ведь ее масса составляла от 1600 до 1800 т. Это был самый большой корабль того времени, о котором нам известно, — судно, поистине гигантское для своей эпохи. В источниках остались сведения и о спуске корабля на воду, наряду с описанием других машин, построенных Архимедом, например катапульты. Размеры судна заставляли задуматься о том, как удалять из него воду, попавшую внутрь. Говорят, что именно для этого Архимед придумал свой знаменитый архимедов винт: «И хотя трюм был невероятно глубоким, но благодаря винту откачивать воду можно было силами одного человека, и это устройство было находкой Архимеда».

Возможно, винт на самом деле и не был изобретением Архимеда, ведь очень хорошо известно, насколько важное место занимала вода в жизни древних греков. Многие философы считали ее первоначалом всех вещей, в греческом пантеоне существовало множество связанных с водой богов. Морскими путями пользовались ежедневно для связей между городами и народами.

Пока Архимед не написал своего трактата «О плавающих телах», мало кто понимал, что, собственно, означает «плавать». Как оказалось, ключевым моментом в плавании тела является его плотность, а не вес. Трактат Архимеда послужил отправной точкой для развития теории судостроения. Во второй части трактата рассматривается равновесие в воде параболоидов — геометрических фигур, очень близких к обводам подводной части корабля. Долгое время суда строились исключительно из дерева, но потом стали использоваться и другие материалы, плотность которых превышает плотность воды: огромные корабли с корпусами из стали плавают на поверхности, несмотря на то что удельный вес этого металла явно выше удельного веса воды. Ведь кусок железа, брошенный в воду, тут же тонет. Каким же образом удается кораблю держаться на поверхности, если железо тяжелей воды? Ответ на данный вопрос заключен в самом строении корабля: надо учитывать, что в корабле есть пустоты, заполненные воздухом, из-за чего его средняя плотность получается меньше плотности воды. Вот почему корабль тонет, если место воздуха занимает вода. Именно это и случилось, например, со знаменитым «Титаником» в ночь с 14 на 15 апреля 1912 года. Гигантское судно длиной 270 м, на котором находилось более 3500 человек, не смогло избежать столкновения с айсбергом и получило большую пробоину в борту, куда тут же хлынула вода. Чтобы предотвратить подобные трагедии, судостроительные верфи часто выпускают корабли с двойным корпусом (особенно это касается нефтеналивных танкеров), делая их менее уязвимыми в случае крушения.



Фотография «Титаника», сделанная 10 апреля 1912 года в начале его плавания в Саутгемптоне, Англия.

И не будем забывать, что использование воды много значило для всех людей древности: так, например, механизмы, поднимающие воду Нила на поля, обеспечивали более эффективную обработку земли. Однако в любом случае данное изобретение было и остается прочно связанным с именем Архимеда. Тот же Витрувий в одной из своих книг описывает «винтовой подъемник для воды», который, в сущности, и был архимедовым винтом, хотя он и не упоминает имени его изобретателя. Механизм представляет собой шнек, заключенный в наклонно расположенную трубу, и служит для подъема воды или зерна при постоянном вращении, поэтому его иногда называют бесконечным винтом.

Тепловой луч

Еще одна широко распространенная легенда, связанная с Архимедом, повествует об уничтожении флота римского полководца Марцелла, атаковавшего Сиракузы. Согласно ей, Архимед использовал большие зеркала, отражающие солнечный свет, чтобы сжечь корабли противника. Данное изобретение известно как «тепловой луч», или «зажигательные зеркала Архимеда». Конечно, речь идет не более чем об очередной легенде, связанной с именем нашего героя, которых существует немало. Однако подобное явление иногда имеет место быть: вспомним, например, что не стоит оставлять кусок стекла на сухих листьях во избежание пожара. Отрицать же подлинность этого исторического анекдота можно на основании двух аргументов: отсутствие достоверных исторических источников и невозможность осуществить такое с научной точки зрения.

Первое соображение, заставляющее признать тепловой луч легендой, основано на исторических аргументах. У нас нет никаких свидетельств об этом событии в заслуживающих доверия

ЛУЧИ СМЕРТИ В КИНО И НА ТЕЛЕВИДЕНИИ

Кинематограф обессмертил Архимеда в нескольких фильмах. Так, этот ученый показан седобородым и глубоким стариком в полнометражной ленте «Кабирия» (1914) — одном из первых исторических приключенческих фильмов, прообразе жанра пеплум. Режиссер Джованни Пастроне (более известный под псевдонимом Пьеро Фоско) снял историю римской девочки по имени Кабирия, живущей в эпоху Второй Пунической войны. В картине показано, как Архимед наносит поражение римскому флоту с помощью зажигательных зеркал, что способствовало закреплению в массовом сознании легенды о «тепловом луче», известном также как луч смерти.

Кадр из фильма «Кабирия» с Энрико Джемелли в роли Архимеда.

Тепловой луч на телевидении

Не так давно, в 2006 году, тепловой луч стал «героем» научно-популярной телепрограммы «Разрушители мифов», в серии под названием «Архимедов луч смерти». В съемках потребовалась помощь группы студентов Массачусетского технологического института, которым в 2005 году удалось поджечь аналогичным образом лодку, хотя и при определенных особых условиях. «Охотники за мифами» Джейми Хайнеман и Адам Сэвидж повторили эксперимент в Сан-Франциско с уменьшенной моделью триремы. Заключение было следующим: подобное событие могло случиться только утром (сиракузское побережье смотрит на восток), при идеальных погодных условиях и если корабль стоит неподвижно очень долгое время. В результате поджог флота, описываемый в легенде, был признан маловероятным событием.

источниках: мы не находим упоминания о нем ни у Плутарха, ни у Тита Ливия, ни у Полибия. Если бы зажигательные зеркала упоминались в жизнеописании Марцелла или в другом историческом труде, то сомнений было бы меньше, но их отсутствие в исторических источниках заставляет относиться к

этой легенде более скептически. Полибий родился через 12 лет после осады Сиракуз и явно слышал о ней свидетельства очевидцев, которые не колеблясь вставлял в свои книги. Однако никаких более-менее близких по времени к упомянутым событиям рассказов о зеркалах не сохранилось. Практически первый, кто рассказал о них,— Гален Пергамский, греческий врач II века, который в своем труде о темпераментах писал: «Архимед сжег вражеские корабли пирейей». Однако и это свидетельство ненадежно, потому что «пирейя» может обозначать как зеркала, так и любые другие зажигательные средства, например горящие стрелы. И только в VI веке можно найти текст, где явно говорится о данном эпизоде, а именно — в книге Анфимия из Тралл (ок. 474—?) «Необыкновенные машины». Анфимий вошел в историю как архитектор (вместе с Исидором Милетским) Софийского собора в Константинополе. В упомянутом труде он рассуждает о возможности зажигать определенные вещества с помощью отраженного света. Хотя он и допускает, что Архимеду удалось поджечь римские корабли, но приходит к выводу, что для этого ему пришлось бы воспользоваться огромными параболическими зеркалами.

Остальные упоминания о тепловом луче еще более поздние и касаются, в частности, такой фигуры, как Прокл, инженер византийского императора Анастасия I. Греческий историк Иоанн Зонара (XII век) рассказывает, что Проклу удалось таким образом поджечь флот Виталиана в Константинополе. Мы здесь не приводим различные источники того времени и более поздних эпох, где упоминается данная тема: в любом случае они вторичны.

Еще одно основание признать зажигательные зеркала легендой, как уже было сказано, — это соображения научные и технические. Многие ученые долгое время пытались доказать, что речь идет о мифе, но были и другие, склонные доверять рассказу о зеркалах. Французский философ и математик Декарт (1596-1650) в своей книге «Диоптрика» начисто отрицал возможность данного опыта. Он утверждал, что используемое для подобных целей зеркало должно иметь огромные размеры, а точность его изготовления должна быть невероятной.

У геометра, решающего задачу, воображения не меньше, чем у поэта, хотя они и обращаются с предметом своего творчества по-разному: первый его расчленяет и анализирует, второй собирает и украшает. [...] Из всех великих людей древности, возможно, только Архимед заслуживает права быть поставленным в один ряд с Гомером.

Жан Батист ле Рон д'Аламбер (1717—1783), физик, математик, философ и астроном

Напротив, люди такого масштаба, как Галилео Галилей, Бонавентура Кавальери и Роджер Бэкон, высказывали доверие историческим сведениям. Вполне вероятно, что они находились под обаянием личности Архимеда, не учитывали технической и научной реальности. Классический пример — Жорж Луи Леклерк (1707-1788) граф де Бюффон, построивший систему зеркал, с помощью которых ему удалось поджечь кусок дерева, сконцентрировав на нем солнечные лучи. Речь идет о системе из 168 зеркал размером 16 х 25 см. Каждое из них необходимо было разворачивать отдельно, чтобы наводить лучи на мишень.

Однако устройство приходило в рабочее состояние далеко не сразу: требовалось потратить не менее получаса, плюс время на то, чтобы дерево загорелось.

Может быть, Архимед смог убедить Марцелла держать свои корабли как можно дольше в неподвижности? А еще он, наверное, был способен успокоить гладь моря, пока лучи наводятся на одну точку? Именно в этом и заключалась проблема, потому что зажечь дерево с помощью определенного типа отражателя возможно, но для этого нужны время и точность наводки. Каким гениальным ученым ни был Архимед, он не мог гарантировать ни одного из данных параметров.

СОЛНЕЧНЫЕ ПЕЧИ

Несмотря на серьезные доводы в пользу того, что тепловой луч Архимеда всего лишь легенда, научная идея, лежащая в основе этой легенды, сегодня успешно применяется на практике. Солнечная энергия может быть использована множеством способов, среди которых в данном случае нам наиболее интересен термический, то есть прямое применение тепла солнечных лучей. Это тепло может пойти на приготовление пищи, подогрев воды или для превращения его в механическую и в конечном счете электрическую энергию. Сущность трех приведенных выше применений одна и та же: концентрация солнечных лучей с помощью параболических отражательных систем (рисунки 1-3).

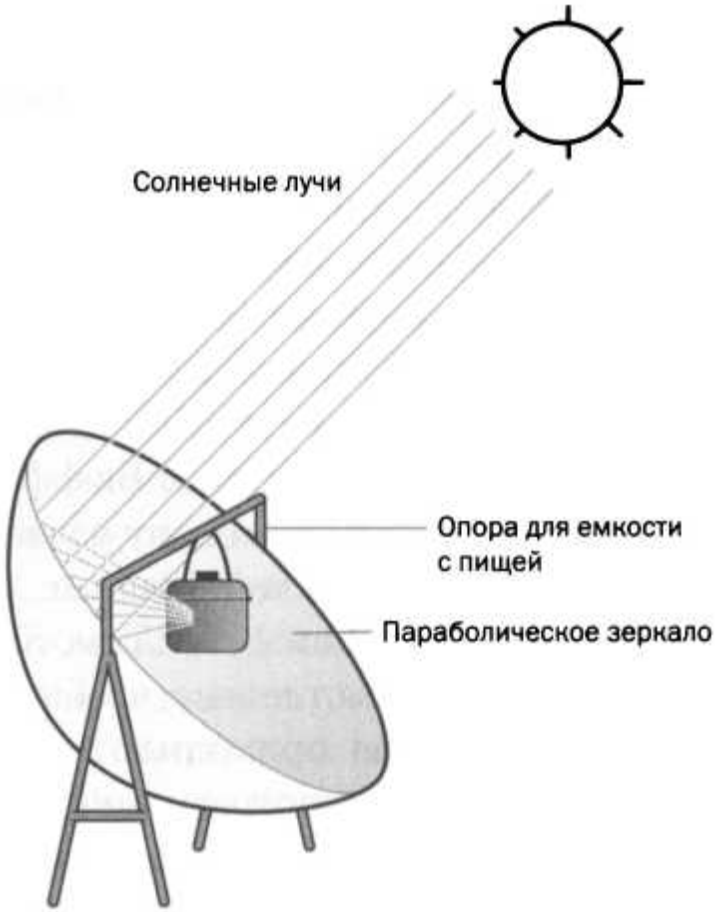


РИС. 1

Если поместить емкость с приготовляемой пищей в фокус параболического зеркала, то с помощью солнечного тепла можно будет готовить. В сущности, идея этой системы та же, что и у зажигательных зеркал Архимеда.

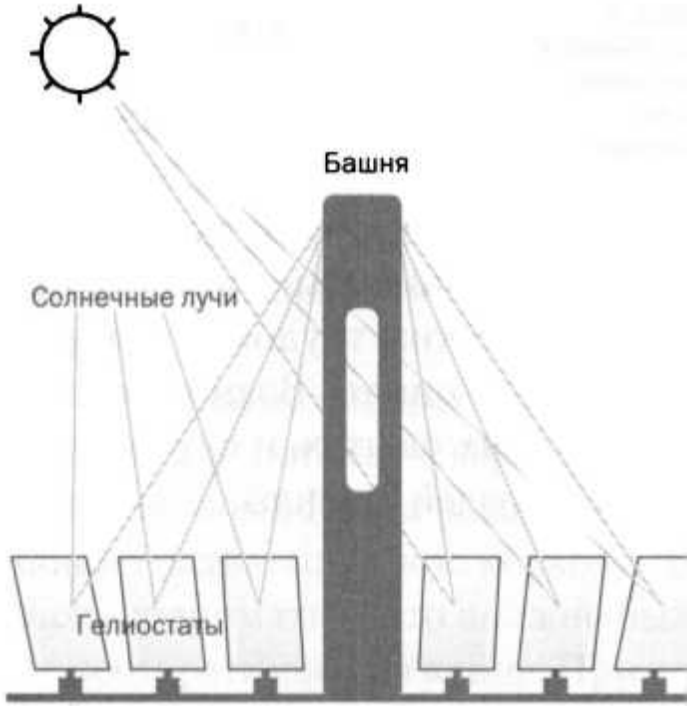


РИС. 2

В башенной технологии гелиостаты (подвижные зеркала), расположенные вокруг башни, концентрируют солнечные лучи на верхней ее части. Там они нагревают жидкость, которая, расширяясь, с помощью вращения турбины производит электричество.

В параболическо-цилиндрической технологии зеркала располагаются на поверхности параболического цилиндра; солнечный свет концентрируется на трубах, проходящих вдоль оси цилиндра. По этим трубам течет жидкость: испаряясь, она вращает турбины, которые превращают кинетическую энергию в электрическую.

Потерянный свет Архимеда

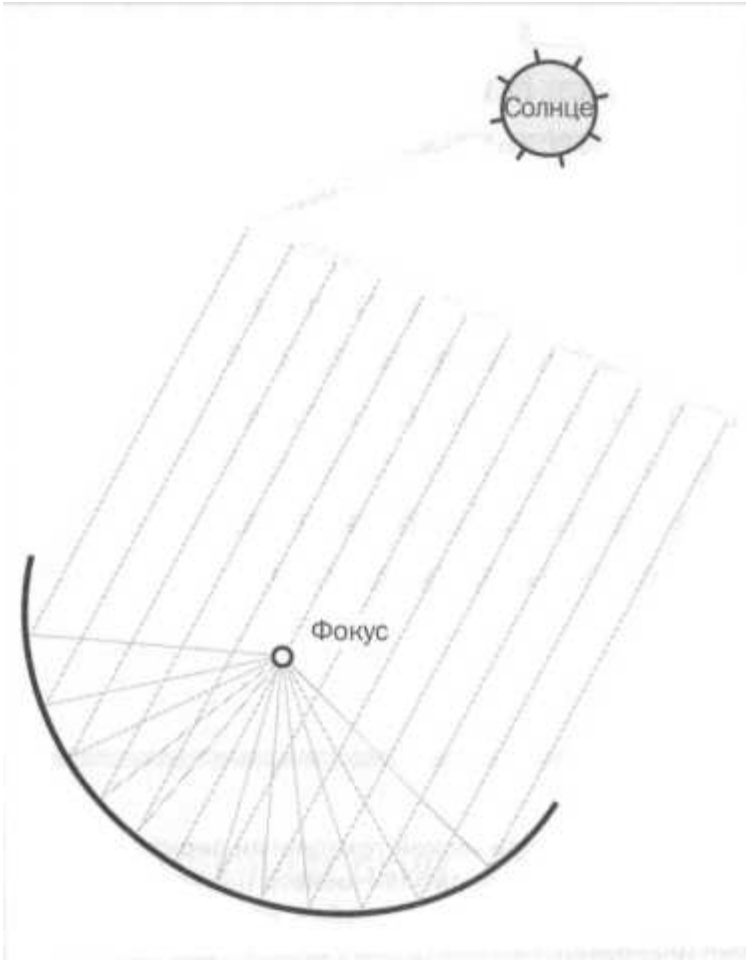
Различные источники цитируют «Катоптрику» — работу, написанную Архимедом и не дошедшую до наших дней. Хотя он глубоко изучил многие свойства параболы, однако нет никаких письменных свидетельств, которые подтверждали бы, что Архимед знал о свойствах параболических зеркал. Более того, ученые, верившие в дальнейшем легенде о зажигательных зеркалах, на самом деле никогда не говорили о параболическом

зеркале, а только о группе зеркал, ориентированных так, чтобы отбрасывать солнечные лучи в одну точку. Надо отметить, что система подобных зеркал эквивалентна параболическому зеркалу, особенно если они ориентированы в соответствии с поверхностью параболоида (см. рисунок на стр. 132).

Один из наиболее надежных источников об утерянном трактате Архимеда — это высказывание греческого математика Теона Александрийского (335-405). В своих комментариях к «Альмагесту» Клавдия Птолемея он говорит:

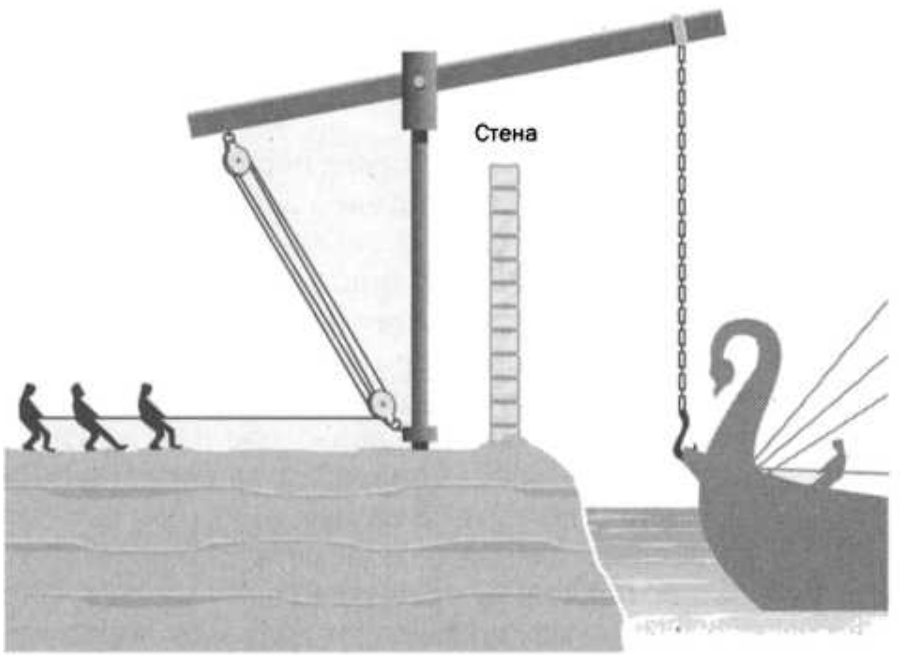
«И падающие из него [глаза] на воздух лучи подвергаются преломлению и делают угол зрения больше, как и доказывает Архимед в «Катоптрике», говоря, что помещенные в воду предметы кажутся большими и тем больше, чем ниже они уходят».[1 Перевод И. Н. Веселовского.]

При наличии важных свидетельств существования трактата «Катоптрика» представляется возможным, что именно он и послужил источником легенды о тепловом луче. Как мы уже видели, для получения своих теоретических результатов Архимед проводил разнообразные эксперименты. Так что «Катоптрика», видимо, была математическим трудом, в котором использовались некоторые физические опыты. Возможно, друзья или близкие ученого знали об этих опытах, и слухи о них со временем послужили основой будущей легенды.


Солнце
Фокус

Коготь Архимеда

Среди прочих устройств, использованных Архимедом при обороне Сиракуз, более всего, наверное, известен так называемый коготь Архимеда, или, как говорили о нем римляне, manus ferrea («железная рука»). Весьма вероятно, что рассказы о нем правдивы, так как его упоминают многие историки, в том числе Полибий и Тит Ливий, хотя они и не приводят деталей его конструкции. Ясно только, что речь идет об особом типе «колодезного журавля» с огромным металлическим крюком, с помощью которого можно было поднимать римские корабли и затем топить их.

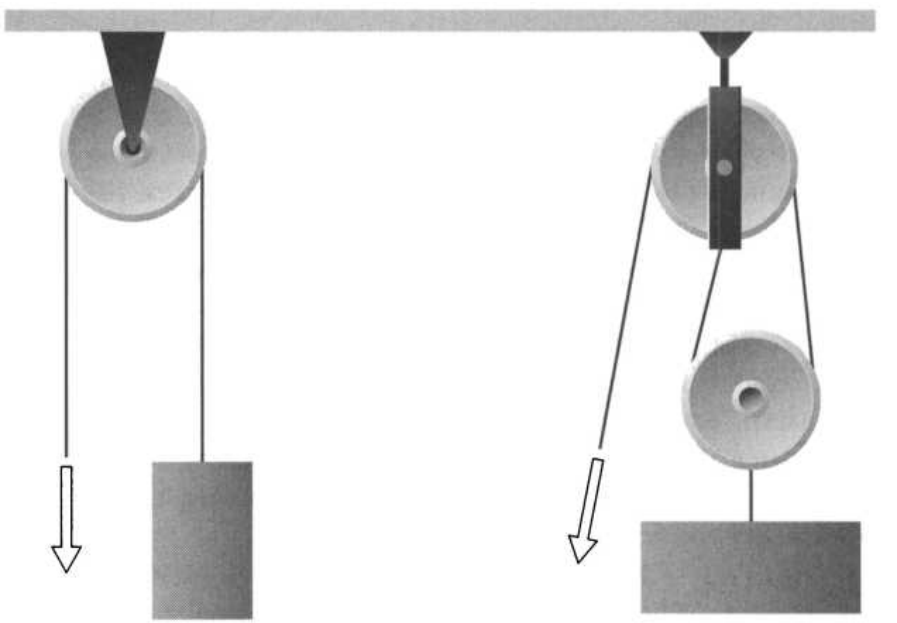


Схематическое изображение работы когтя Архимеда.

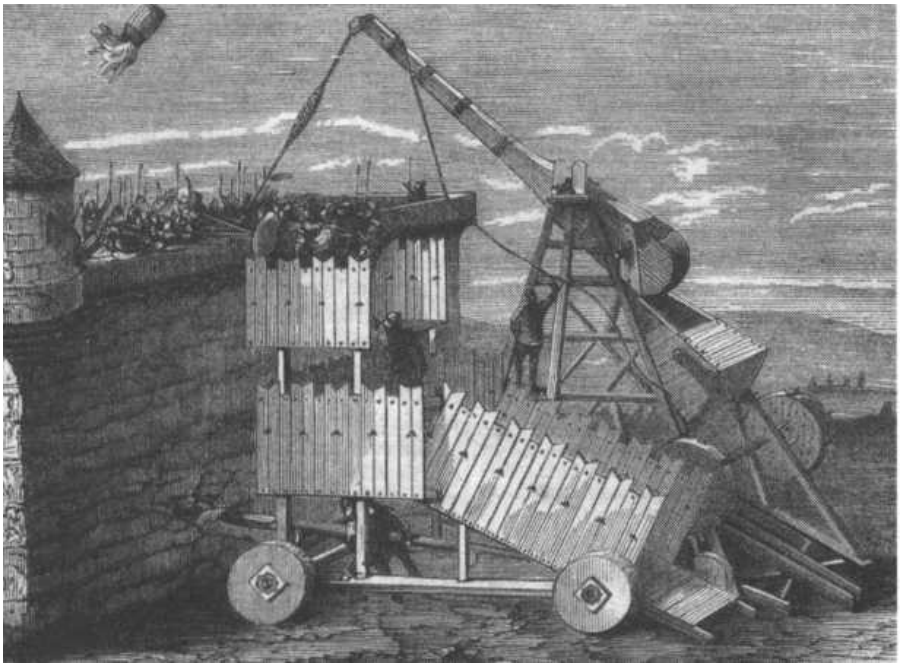
В целом механизм состоял из системы блоков, которая приводилась в движение силой животных или множества людей (см. рисунок). Раз за разом крюк бросали вниз, и в конце концов он захватывал нос корабля. После захвата корабль начинали поднимать — это должно было быть довольно медленное, но неотвратимое движение. При достижении определенной высоты корабль бросали, он получал повреждения и тонул. Полибий описывал это так:

ПОЛИСПАСТ

Существует распространенное мнение, что Архимед первым использовал полиспаст — возможно, для своей «железной руки» или для спуска на воду «Сиракузии». Так или иначе очевидно, что для своих машин он должен был использовать систему, умножающую силу. Именно это по сути делает полиспаст. Речь идет о системе блоков (как минимум двух), используемой для получения выигрыша в силе или скорости при подъеме груза. Это вовсе не нарушает закона сохранения энергии: в то время как точка приложения двигающей силы проходит определенный путь, движимое тело преодолевает гораздо меньшее расстояние. В итоге совершаемая работа в обоих случаях будет одинаковой. Принцип тут тот же самый, что и у рычага с неравными плечами, так что если Архимед и не изобретал полиспаста, он, несомненно, его использовал, поскольку прекрасно знал механизм его действия, чрезвычайно похожий на механизм одного из самых изучаемых им устройств — рычага.

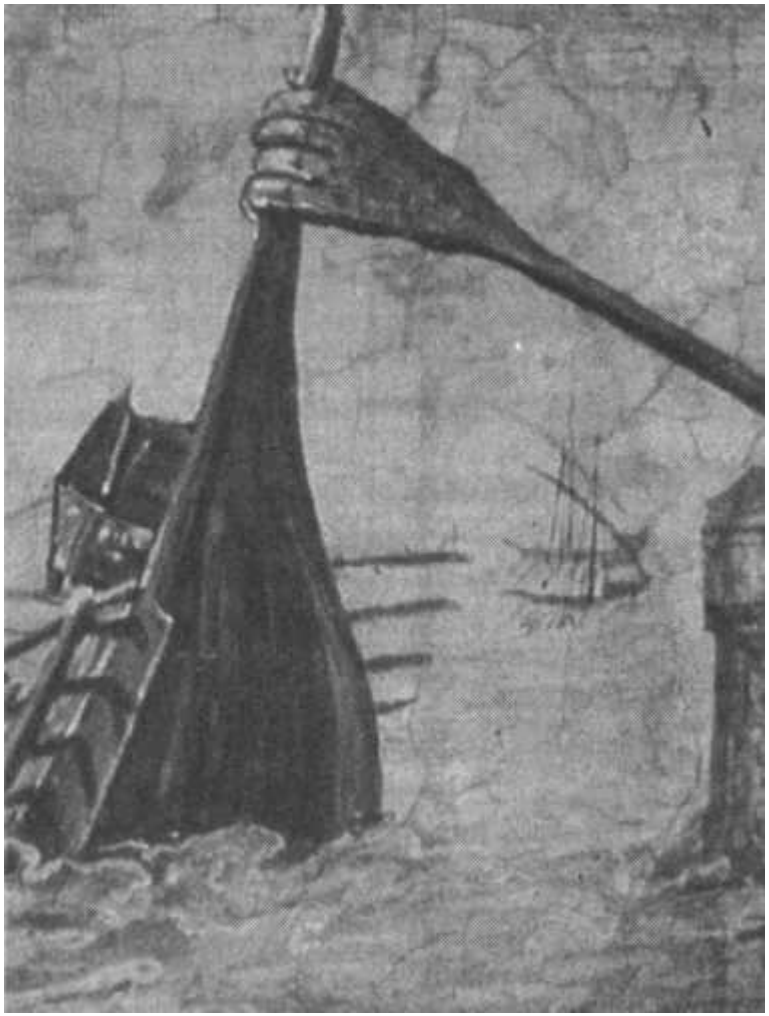


Если для поднятия груза с помощью простого блока (при отсутствии трения) нужна сила, равная весу груза, то при использовании полиспаста такая сила уменьшается, и большие грузы можно поднимать малым усилием.



С момента появления катапульта всегда была востребована, вплоть до Средних веков.

Гравюра из трактата «Сокровище оптики»Ибн аль-Хайсама (965— 1040), показывающая, как Архимед использовал зажигательные зеркала.



Фрагмент фрески с изображением «когтя Архимеда».

«Другие поднимали железную лапу, привязанную к цепи, с помощью которой человек, управляющий машиной, схватив корабль за нос, опускал заднюю часть машины за стеной; таким образом нос корабля поднимался, и корабль ставился на корму. Затем, закрепив заднюю часть машины так, чтобы она не двигалась, с помощью особого устройства сбрасывали руку с цепью. В результате некоторые корабли падали на бок, другие разваливались и почти все, брошенные с высоты, набирали воды и тонули».

Ученые и инженеры всегда проявляли интерес к этой конструкции — как в древности, так и в наши дни. Например, в 2005 году был успешно построен «коготь Архимеда» для одной из серий документального сериала «Супероружие древнего мира»,

что доказало возможность его создания Архимедом.

В своем жизнеописании Марцелла Плутарх также упоминает железную руку:

«На вражеские суда вдруг стали опускаться укрепленные на стенах брусья и либо топили их силою толчка, либо, схватив железными руками или клювами вроде журавлиных, вытаскивали носом вверх из воды, а потом, кормою вперед, пускали ко дну, либо, наконец приведенные в круговое движение скрытыми внутри оттяжными канатами, увлекали за собою корабль и, раскрутив его, швыряли на скалы и утесы у подножия стены, а моряки погибали мучительной смертью».[2 Перевод С. П. Маркиша.]

АРХИМЕД: МИФЫ И РЕАЛЬНОСТЬ

В этой книге представлены и реальные истории, и легенды, сложившиеся вокруг жизни, открытий и изобретений Архимеда. Ниже мы вкратце поговорим о самых ярких моментах, которые связывают с жизнью ученого.

1. «Дайте мне точку опрры, и я переверну Землю!» Сомнительно, чтобы Архимед на самом деле произносил такие слова: у него было достаточно знаний, чтобы понять, что это невозможно.

2. «Эврика! Эврика!» Радостное восклицание, которое, согласно легенде, издал Архимед, голым выскочив из ванны на улицу. Случилось это якобы после открытия им закона гидростатики. Очень маловероятно, что данная история произошла именно так. Скорее всего, она подверглась литературной обработке Витрувия.

3. Корона царя Гиерона II. Рассказ о короне, без сомнения, имеет под собой историческое основание, хотя для доказательства мошенничества необходимо было применить комбинацию закона Архимеда и закона рычага, а не просто довольствоваться вылившейся через край сосуда водой.

4. Эпитафия на могиле. Весьма вероятно, что Архимед действительно завещал вырезать на своей могиле шар, вписанный в цилиндр. Цицерон нашел эту могилу, уже тогда сильно поврежденную, но, к сожалению, до наших дней она не сохранилась.

5. «Не трогай моих кругов!» Сама фраза, может быть, и выдумана, но контекст, в котором она, по преданию, была произнесена,— нет. Историки согласны в том, что Архимед

был убит в своем доме во время работы. Неясно только, действительно ли он сказал эту фразу солдату перед убийством.

6. Архимедов винт. Данное устройство, скорее всего, было известно еще до рождения ученого. Но вполне возможно, что он каким-нибудь образом усовершенствовал его или же расширил область его применения.

7. Руководство обороной Сиракуз. Согласно всем достоверным источникам эти сведения об Архимеде, по-видимому, верны.

8. «Коготь Архимеда». Ученый действительно построил машину, которая поднимала и разрушала корабли противника, как это следует из хроник.

9. Тепловой луч. Почти наверняка является мифом из-за технических ограничений и молчания античных историков.

10. Вычисление π. Часто говорят, что Архимед вычислил число π. Это невозможно! Десятичное представление числа π является бесконечным и не имеет периода. Поэтому знаки данного числа после запятой можно вычислять бесконечно. Но правда в том, что Архимед вычислил приближение для числа π, которое используется до сих пор, — 3,14.

Катапульта

Катапульта — это военное орудие, использующее потенциальную энергию эластичных элементов для преобразования ее в кинетическую энергию снаряда. Известно, что ко времени Архимеда катапульта была уже известна и что он внес в ее конструкцию значительные улучшения. К примеру, Полибий рассказывает:

«Но Архимед приготовил машины, которые метали камни на любое желаемое расстояние».

Наблюдатель неба

Единственная книга, в которой Архимед выказывает интерес к астрономии, — это «Исчисление песчинок». Тем не менее существуют другие источники, и согласно им он посвятил часть своей жизни наблюдению за небесными телами и даже сконструировал некоторые инструменты для этой цели. Так, Папп Александрийский рассказывает, что Архимед написал трактат «О строении сфер», который, к сожалению, был утерян.

«В этом сицилийском ученом [Архимеде] был заключен гений куда более высокий, чем любой другой человеческий гений».

Марк Туллий Цицерон (106-43 до н. э.)

Со своей стороны Цицерон рассказывает, что во время разграбления Сиракуз солдаты Марцелла нашли два шара, принадлежавших знаменитому ученому. Один из них, с резной поверхностью, представлял собой небесный глобус, изобретение которого Цицерон приписывает Фалесу и Евдоксу. Второй был еще удивительней, и авторство его Цицерон признает за Архимедом: это был планетарий, то есть механическая система, представляющая движение Солнца, Луны, планет и звезд, с Землей в центре. Обе сферы были взяты в качестве военного трофея и помещены Марцеллом в храм Доблести в Риме. Как свидетельствует Цицерон, полководец, политик и астроном Гай Сульпиций Галл тщательно изучил механизм:

«Но как только Галл начал объяснять нам с большим знанием принцип действия этой машины, я решил, что в этом сицилийском ученом был заключен гений куда более высокий, чем любой другой человеческий гений».

В 1990 году были найдены остатки греческого корабля I века до н. э. Там было обнаружено устройство, которое исследователи определили как астрономический вычислитель, то есть очень сложный планетарий. Находка была названа Антикитерским механизмом, потому что нашли ее рядом с одноименным греческим островом. Речь идет об очень искусном планетарном механизме, у которого должен был быть образец для изготовления. Возможно, таким образцом послужил механизм Архимеда.

Память об Архимеде

Архимед не просто оставил свой след в истории инженерного дела. Многие устройства нашего времени часто носят его имя, что служит данью уважения великому ученому. Часто мы видим и слово «Эврика» в названии исследовательских центров, ассоциаций и тому подобных организаций. Имя Архимеда три раза встречается на карте Луны. Кратер Архимед диаметром 80 км и глубиной 2,1 км имеет селенографические координаты 29.72° с. ш и 3.99° з. д. и находится в восточной части Моря Дождей. К югу от кратера вздымаются горы Архимед, а к юго-востоку от них простирается равнина Болото Гниения, где находится система трещин, называемых расщелины Архимед. Советский зонд Луна-2 — первый рукотворный объект, достигший Луны, — врезался в ее поверхность в Болоте Гниения 14 сентября 1959 года. А первыми людьми, приблизившимися к кратеру Архимед, стали Дэвид Скотт и Джеймс Ирвин — командир и пилот лунного модуля «Фалкон» корабля «Аполлон-15». Местом их прилунения стало подножие Апеннинских гор, примерно в 200 км к югу от центра кратера.

Приложение

О ШАРЕ И ЦИЛИНДРЕ[1 Здесь и далее перевод И. Н. Веселовского]

Книга I

Утверждение 2

Тогда выпуклой в одну и ту же сторону я называю такую линию, для которой прямые, соединяющие две произвольные ее точки, будут или все находиться по одну сторону этой линии, или же некоторые по одну ее сторону, другие же на самой линии, но никакая такая прямая не будет находиться по другую ее сторону.

Утверждение 33

Поверхность всякого шара равна его учетверенному большому кругу.

Утверждение 34

Всякий шар в четыре раза больше конуса, имеющего основание, равное большому кругу шара, а высоту, равную радиусу шара.

Следствие [из утверждения 34]

Из доказанного ясно, что всякий цилиндр, имеющий основанием большой круг шара, а высоту, равную его диаметру, будет в полтора раза больше шара и что поверхность его вместе с основаниями будет в полтора раза больше поверхности шара.

Утверждение 42

Поверхность всякого сферического сегмента, который меньше, чем полушарие, равна кругу, радиус которого равен прямой, проведенной из вершины сегмента до окружности круга, являющегося основанием сегмента.

Утверждение 44

Всякий сферический сектор равен конусу, имеющему основание, равное поверхности сферического сегмента, соответствующего этому сектору, а высоту, равную радиусу шара.

Книга II

Архимед приветствует Досифея.

Ты уже просил меня написать доказательства для тех проблем, формулировки которых я посылал к Конону; при изложении большей части их приходится пользоваться теоремами, доказательства которых я уже послал тебе, а именно: [...]

Утверждение 3

Третья задача была такова: данный шар рассечь плоскостью

так, чтобы поверхности получившихся сегментов находились бы друг к другу в отношении, равном заданному.

ОБ ИЗМЕРЕНИИ КРУГА

Утверждение 1

Всякий круг равен прямоугольному треугольнику, причем радиус круга равен одной из прилегающих к прямому углу сторон, а периметр — основанию треугольника.

Утверждение 2

Круг к квадрату со стороной, равной своему диаметру, относится, как И к 14.

Утверждение 3

Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых частей.

О КОНОИДАХ И СФЕРОИДАХ

Утверждение 4

Всякая площадь, ограниченная эллипсом, имеет к кругу с диаметром, равным большему диаметру эллипса, то же самое отношение, что меньший диаметр эллипса к большему или к диаметру круга.

Утверждение 6

Площади, ограниченные эллипсами, находятся друг к другу в таком же отношении, как прямоугольники между диаметрами эллипсов.

Утверждение 19

Если дан сегмент какого-нибудь из коноидов, отсеченный перпендикулярной к оси плоскостью, или же сегмент какого-нибудь из сфероидов, не больший половины этого сфероида и точно так же отсеченный, то можно вписать в него объемную фигуру и описать около него другую, состоящую из имеющих равную высоту цилиндров, и притом так, чтобы описанная фигура была больше вписанной на величину, которая меньше любой наперед заданной величины.

Утверждение 21

[...] Всякий сегмент прямоугольного коноида, отсеченный плоскостью, перпендикулярной к оси, будет в полтора раза больше конуса, имеющего те же самые основания и ось, что и сегмент.

Утверждение 27

Если какую-нибудь сфероидальную фигуру рассечь плоскостью, проходящей через центр и перпендикулярной к оси,

то половина сфероида будет вдвое больше конуса, имеющего то же самое основание и ту же ось, что и сегмент.

О СПИРАЛЯХ

В книгах, которые были посланы через Гераклида, ты имеешь запись большей части тех ранее посланных Конону теорем, доказательства которых ты все время просил меня дать; в этой же книге я посылаю тебе запись некоторой части из оставшихся.

Утверждение 1

Если некоторая точка равномерно движется по какой-нибудь линии и на последней берутся две линии, то взятые линии будут иметь друг к другу то же самое отношение, что и времена, в течение которых точка прошла эти линии.

Утверждение 24

Площадь, заключенная между спиралью, описанной в течение первого оборота и первой из прямых, находящихся на начале вращения, будет третьей частью первого круга.

О РАВНОВЕСИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Книга I

Сделаем следующие допущения.

1. Равные тяжести на равных длинах уравновешиваются, на неравных же длинах не уравновешиваются, но перевешивают тяжести на большей длине.

2. Если при равновесии тяжестей на каких-нибудь длинах к одной из тяжестей будет что-нибудь прибавлено, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, к которой было прибавлено.

3. Точно так же если от одной из тяжестей будет отнято что-нибудь, то они не будут уравновешиваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято.

Утверждение 1

Тяжести, уравновешивающиеся на равных длинах, будут тоже равны.

Утверждение 2

Неравные тяжести на равных длинах не уравновешиваются, но перевешивает большая.

Утверждение 6

Соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям.

Утверждение 7

И далее, если величины будут несоизмеримыми, то они точно так же уравновесятся на длинах, которые обратно пропорциональны этим величинам.

Утверждение 10

У всякого параллелограмма центром тяжести будет точка, в которой встречаются диаметры (то есть диагонали).

Утверждение 14

У всякого треугольника центром тяжести будет точка, в которой встречаются прямые, проведенные из углов к серединам сторон.

Книга II

Утверждение 8

У всякого сегмента, ограниченного прямой и параболой, центр тяжести делит диаметр сегмента так, что прилежащий к вершине сегмента отрезок в полтора раза больше отрезка у основания.

ИСЧИСЛЕНИЕ ПЕСЧИНОК (ПСАММИТ)

Архимед Гелону

Некоторые люди полагают, государь Гелон, что число песка по величине бесконечно; я говорю не только о песке, который имеется в окрестностях Сиракуз и остальной Сицилии, но и о том, который имеется во всех странах, как населенных, так и не населенных. Есть, однако, и такие, которые не считают его бесконечным, но тем не менее думают, что не существует такого имеющего название числа, которое было бы больше его количества.

[...] Что касается меня, то я постараюсь показать тебе при помощи геометрических доказательств, которые ты можешь понять, что среди чисел, которые получили от нас название и опубликованы в адресованной (мной) Зевксиппу книге, некоторые превосходят не только число песчинок в объеме, равном заполненной, как мы сказали, Земле, но даже в объеме, равном миру. Как ты знаешь, большинство астрономов называют миром шар, центр которого совпадает с центром Земли, а радиус равен прямой, заключающейся между центрами Солнца и Земли. Но Аристарх Самосский [...] предполагает, что неподвижные звезды и Солнце находятся в покое, а Земля обращается вокруг Солнца по

окружности, расположенной посредине между Солнцем и неподвижными звездами, а сфера неподвижных звезд имеет тот же центр, что и у Солнца, и так велика, что круг, по которому, как он предположил, обращается Земля, так же относится к расстоянию неподвижных звезд, как центр сферы к ее поверхности. Но хорошо известно, что это невозможно, так как центр сферы не имеет никакой величины, то нельзя предполагать, чтобы он имел какое-нибудь отношение к поверхности сферы...

Сделаем следующие предположения: во-первых, окружность Земли составляет приблизительно 300 мириад стадиев, но не больше, [...] затем, что диаметр Земли больше диаметра

Луны, а диаметр Солнца больше диаметра Земли, принимая то же, что и большинство предшествующих астрономов, [...] далее, что диаметр Солнца приблизительно в тридцать раз больше диаметра Луны, но не больше, хотя из предшествующих астрономов Евдокс считал его только в девять раз больше, Фидий же, мой отец, — в двенадцать раз больше, а Аристарх пытался доказать, что диаметр Солнца более чем в восемнадцать раз, но менее чем в двадцать раз больше диаметра Луны.

[...] Кроме того, я думаю, что было бы полезным изложить здесь правила наименования чисел, чтобы другие (читатели), которые не имели в руках книги, написанной мной Зевксиппу, не затруднялись тем, что в настоящей книге об этих числах ничего не сказано. Так вот для чисел до десятков тысяч (мириад) остаются обычно употребляемые нами названия, после же десятков тысяч, как мы полагаем, достаточно считать мириадами вплоть до мириады мириад. Упомянутые до сих пор числа вплоть до мириады мириад назовем первыми, а мириаду мириад первых чисел назовем единицей вторых чисел, далее будем считать единицы вторых чисел и из таких единиц составим десятки, сотни, тысячи и мириады вплоть до мириады мириад. Затем мириаду мириад вторых чисел назовем единицей третьих чисел; после этого будем считать единицы третьих чисел, а за единицами десятки, сотни, тысячи и мириады вплоть до мириады мириад. Таким же образом, мириаду мириад третьих чисел назовем единицей четвертых чисел, а мириаду мириад четвертых чисел назовем единицей пятых чисел. Продолжая так постоянно, мы дадим названия числам вплоть до мириады мириад мириадо-мириадных чисел.

Вполне достаточно знать числа только до этих пор, но можно идти и далее. Действительно, пусть упомянутые до сих пор числа называются числами первого периода, а последнее число первого периода назовем единицей первых чисел второго периода. Далее мириаду мириад первых чисел второго периода назовем

единицей вторых чисел второго периода. Точно так же последнюю единицу этих чисел назовем единицей третьих чисел второго периода; если постоянно продолжать таким образом, то числа второго периода получат имена вплоть до мириады мириад мириадо-мириадных чисел. Далее, последнее число второго периода назовем единицей первых чисел третьего периода и будем так продолжать вплоть до мириады мириад мириадо-мириадных чисел мириадо-мириадного периода. [...]

Теперь доказано, что количество песка в (объеме), равном по величине тому, что большинство астрономов называют миром, меньше чем 1000 единиц седьмых чисел. [...]

[...] Ясно, что количество песчинок в (объеме), равном по величине сфере неподвижных звезд, как ее мыслит Аристарх, будет меньше, чем тысяча мириад (единиц) восьмых чисел.

О КВАДРАТУРЕ ПАРАБОЛЫ

Архимед Досифею

Узнав о смерти Конона, делавшего все для нас из дружбы, и о том, что ты был близок к Конону и сведущ в геометрии, мы очень опечалились о покойном и как о друге, и как о выдающемся математике. Поэтому мы решили написать тебе, подобно тому как обычно писали Конону, и послать некоторые геометрические теоремы, остававшиеся ранее неизвестными, а теперь полученные нами; они были сначала обнаружены нами при помощи механических методов, а затем доказаны также и геометрически.

Утверждение 21

Если в сегмент, заключенный между прямой и параболой, вписать треугольник, имеющий с сегментом то же самое основание и ту же высоту, а в оставшиеся сегменты вписать другие треугольники, имеющие те же самые основания и высоты, что и у этих сегментов, то треугольник, вписанный в весь сегмент, будет в восемь раз больше каждого из треугольников, вписанных в сегменты, оставшиеся [по краям].

Утверждение 23

Если взять несколько величин, образующих непрерывную пропорцию в отношении четырех к одному, то все эти величины вместе, сложенные с третьей частью наименьшей, составят четыре трети наибольшей.

Утверждение 24

Всякий сегмент, заключенный между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с ним одно и то же основание и равную высоту.

Книга I

Предположим, что жидкость имеет такую природу, что из ее частиц, расположенных на одинаковом уровне и прилежащих друг к другу, менее сдавленные выталкиваются более сдавленными и что каждая из ее частиц сдавливается жидкостью, находящейся над ней по отвесу, если только жидкость не заключена в каком-нибудь сосуде и не сдавливается еще чем-нибудь другим.

Утверждение 2

Поверхность всякой жидкости, установившейся неподвижно, будет иметь форму шара, центр которого совпадает с центром Земли.

Утверждение 3

Тела, равнотяжелые с жидкостью, будучи опущены в эту жидкость, погружаются так, что никакая их часть не выступает над поверхностью жидкости, и не будут двигаться вниз.

Утверждение 4

Тело более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, не погружается целиком, но некоторая часть его остается над поверхностью жидкости.

Утверждение 5

Тело, более легкое, чем жидкость, будучи опущено в эту жидкость, погружается настолько, чтобы объем жидкости, соответствующей погруженной (части тела), имел вес, равный весу всего тела.

Утверждение 6

Тела более легкие, чем жидкость, опущенные в эту жидкость насильственно, будут выталкиваться вверх с силой, равной тому весу, на который жидкость, имеющая равный объем с телом, будет тяжелее этого тела.

Утверждение 7

Тела, более тяжелые, чем жидкость, опущенные в эту жидкость, будут погружаться, пока не дойдут до самого низа и в жидкости станут легче на величину веса жидкости в объеме, равном объему погруженного тела.

Книга II

Утверждение 1

Если какое-нибудь тело, более легкое, чем жидкость, опустить в эту жидкость, то оно по тяжести будет находиться в том же отношении с жидкостью, какое погруженный объем имеет ко всему объему.

СТОМАХИОН

Поскольку так называемый стомахион может служить предметом разнообразных теорий относительно перестановок составляющих его фигур, то я счел необходимым сначала рассказать о его величине, об отдельных его частях, на которые он разделяется, о том, чему каждая из них может быть уподоблена...

МЕТОД МЕХАНИЧЕСКИХ ТЕОРЕМ

Архимед приветствует Эратосфена.

[...] Зная, что ты являешься, как я всегда говорю, ученым человеком и по праву занимаешь выдающееся место в философии, а также при случае можешь оценить и математическую теорию, я счел нужным написать тебе и в этой же самой книге изложить некоторый особый метод, благодаря которому ты получишь возможность при помощи механики находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем. Действительно, кое-что из того, что ранее было мною усмотрено при помощи механики, позднее было также доказано и геометрически, так как рассмотрение при помощи этого метода еще не является доказательством; однако получить при помощи этого метода некоторое предварительное представление об исследуемом, а затем найти и само доказательство гораздо удобнее, чем производить изыскания, ничего не зная.

[...] Поэтому я и решил написать об этом методе и обнародовать его, с одной стороны, для того чтобы не оставались пустым звуком прежние мои упоминания о нем, а с другой — поскольку я убежден, что он может принести математике немалую пользу; я предполагаю, что некоторые современные нам или будущие математики смогут при помощи указанного метода найти и другие теоремы, которые нам еще не приходили в голову.

КНИГА ЛЕММ

Утверждение 4

Пусть ABC будет полукруг; построим на диаметре AC два полукруга AD и DC и восставим перпендикуляр DB\ получающаяся фигура, которую Архимед называет «арбелос» (это

будет площадь, ограниченная дугой большого полукруга и двумя окружностями малых кругов), будет равна кругу, диаметром которого является перпендикуляр DB.

Утверждение 5

Если дан полукруг AB, на его диаметре где-нибудь взята точка C, на диаметре построены два полукруга Л C и CB, из C восставлен перпендикуляр CD к AB и с обеих сторон (от него) построены два круга, касающиеся как этого перпендикуляра, так и обоих полукругов, то эти два круга будут равны.

Утверждение 7

Если около квадрата один круг описан, а другой вписан в него, то описанный круг будет вдвое больше вписанного.

Утверждение 14

Если будет полукруг AB, от его диаметра AB отсечены равные прямые Л C, BD и на линиях Л C, CD, DB построены полукруги, причем центром двух полукругов на AB и CD будет точка E, то по проведении к AB перпендикуляра EF, продолженного до точки Gy круг на диаметре FG будет равен площади фигуры, заключающейся между большим полукругом, находящимися внутри его двумя полукругами и средним полукругом, который будет вне большого полукруга. И это есть фигура, которую Архимед называет «салинон».

ЗАДАЧА О БЫКАХ

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец. (Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд.)

Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных Их в четырех стадах много когда-то паслось.

Цветом стада различались: блистало одно млечно-белым, Темной морской волны стада другого был цвет,

Рыжим третие было, последнее пестрым...

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь.

Нам раздельно назвав тучных быков число,

Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было, Не назовет тут никто в числах невеждой тебя...

Список рекомендуемой литературы

Arqui'medes-Eutocio, Tratados I. Comentarios, Madrid, Gredos, 2005.

—: Tratados II. Comentarios, Madrid, Gredos, 2005.

Bell, E.T., Losgrandes matematicos, Buenos Aires, Losada, 2010.

Boyer C., Historia de la matemdtica, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

Gamow, G., Biografia de la ftsica, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

Lozano, M., De Arquimedes a Einstein, Barcelona, Debolsillo, 2007.

Plutarco, Vidas paralelas, «Vida de Marcelo» (en Biografos griegos), Aguilar, Madrid, 1970.

Stewart, I., Historia de las matematicos, Madrid, Critica, 2008. Strathern, P., Arquimedes y la palanca, Madrid, Siglo XXI, 1999. Torija, R., Arquimedes. Alrededor del circulo, Madrid, Nivola, 1999.

Vega, L., Arquimedes: El metodo, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

Указатель

айсберг 52,53,125
Александрийская библиотека 18, 19
Александрия 117,122,124,132,138
антикитерский механизм 139
«Аполлон-15» 140
арбелос (геометрическая фигура) 113-115
Аристотель 35,38, 39, 58
Архит Тарентский 59 Асуан 18,19
блок 121,133,134
Венаторий, Томас 32
весы 49, 50,58-60,62,64,66,123
Вильгельм из Мербеке 30, 31
винт Архимеда 11, 122, 123, 124, 137
Витрувий, Марк Полл ион 29, 41, 43,44,49, 65,126,136
водяные часы 48, 50
Галилей, Галилео 11,39,51,65-67, 129
Ганнибал 13, 21, 25
Гейберг, Йохан Людвиг 20, 30, 32, 33, 76,141
Гелон 13, 20, 67-69,146
Геракл ид Тарентский 22
Геракл ид 17,144
Герон Александрийский 30, 31, 76, 122
гидростатика 30,42-43,51,55,65-67.123.136
Гиерон II (тиран Сиракуз) 9, 10, 13, 20,21,24, 26, 28, 37, 40,41, 45.65.67.124.136
горы Архимед (на Луне) 139
гугол 72
«делосская задача» 94 динамика 52
Диодор Сицилийский 17
доведение до абсурда 75,81,88,102
Досифей 20, 91, 95, 100, 111, 142, 148
Евдокс Книдский 28, 77, 80, 138, 147
Евклид 8,15,18, 76, 80,81
Евтокий Аскалонский 17,30
Египет 17, 19, 48, 49,124
Задача о быках 105, 107, 110, 111, 115, 152
Зевксипп 70,146,147
Земля 9, 13, 18-21, 42, 54, 55, 62, 67-69,123,139,146,147,149
еркала зажигательные 11, 126— 128,130,131,135
золото 29, 40,41, 43-50
исчерпывания метод 76, 77, 80-82, 85,96,100,102,112

«Исчисление песчинок» 13, 17, 20, 31,38, 67-69, 70-72,138,146
картезианский водолаз 57
катапульта 11, 22, 121, 122, 124, 135,138
квадратура круга 98, 99,112
квадратура параболы 20, 31, 78, 100,102, 103,148
Клавдий Птолемей 132
клепсидра 49-50
«Коготь Архимеда» 132, 135, 136, 137
Конон Самосский 20,100,142,144, 148
константинопольский палимпсест 20, 27, 32-34, 76, 78
корона 10, 13, 29, 37, 40, 41, 43-51, 65, 136
кратер Архимед 139, 140 круг 23, 27, 29, 31, 34, 69, 73, 80, 85-89,91,93,95,96,98,99,113, 114,141-144,146, 151,152
Ктесибий Александрийский 49, 50
легенда 11, 37, 41, 43, 45, 94, 121, 126,127-128,130,132,136
Луна 17, 67, 69, 70, 139, 140,147
мамертинцы 13, 24
Марк Манилий 7 марки 123
Марцелл, Марк Клавдий 13, 21- 24, 26, 126, 128, 129, 137, 138, 139
механика 31, 33, 75-80, 100, 130, 148.150.151
мириада (число) 68-72, 107, 146—148
миф И, 37, 43,121,127,136,137
могила Архимеда 13, 28, 75, 90, 115,136
надгробие 89, 90,123
невсис 82, 83
Ньютон, Исаак 11, 39, 42, 43, 56, 103,122
объем 8, 32, 39, 42-44, 46-52,55, 58,73,89-91,93,94,98,112,150
окружность 10,11,18,19,69,83,84, 85, 87, 88, 95, 96, 99, 113, 114, 116.117.142.143.146.151
октада 71
опоры точка 61-64
Папп Александрийский 20, 30, 31, 45, 64, 114, 117,138
парабола 8, 10, 20, 31, 64, 78, 79, 100-102,112,130,131,145,148, 149
параболоид 8,55,111,112,113,125, 131,143
плавательный пузырь 56, 57
планетарий 138, 139
Платон 28,117
плотность 39, 42-43, 46, 51-57, 59, 66, 125
Плутарх 21, 23, 26, 28,80,128,137
поверхности 8, 47, 48, 55, 65, 68, 80-82, 84, 85, 87, 89, 91, 93, 96, 100, 103, 111, 112, 114, 116, 131, 138, 141, 142, 144, 146, 149, 151, 152

Полибий из Мегалополиса 23,128, 132,133, 138
полиспаст 133, 134
полуокружность 114,116
Птолемей III Египетский 124
Пунические войны 9, 15, 24, 25
расщелины Архимед (на Луне) 139
Регионтан (Йоганн Мюллер) 30
Рим 13,21,24,25, 139
рычаг 8, 31, 38, 43, 59-65, 75, 121- 123,134,136
рычага закон 10, 13, 21, 37, 38, 49, 58,61,100, 122, 123, 136
Сабит ибн Курра 30, 113
салинон 114,116, 152
серебро 40,41, 43, 44, 46, 47
Сиракузия (корабль) 11,124,134
Сиракузы 7,9,13,17, 20,21,23-25, 27, 29, 32, 37, 40,41,45, 55, 67, 68, 115, 121, 122, 124, 126-128, 132,137,146
Сицилия 13, 21, 24,25,68,107,115, 146
солнечные печи 130
спираль Архимеда 8, 95-99, 126, 144
Стомахион 31, 34, 78, 79, 150
Сципион Африканский, Публий Корнелий 25
тепловой луч 121, 126-128, 130, 132, 137
Тит Ливий 128,132
Титаник 124,125
треугольник 31, 64, 78, 79, 83, 88, 89, 100-102, 110, 142, 145, 148, 149
трисекция угла 83, 98, 99
труба-весы 60
удельный вес 39, 42, 55
Фидий (отец Архимеда) 9, 17, 20, 69, 70,147
Филдсовская премия 7
Цец, Иоанн 26
Цицерон, Марк Туллий 13, 28, 90, 136,138,139
эллипс 111, 143
эллипсоид 111
эолипил (машина) 122
Эратосфен из Кирены 9,13,18-20, 33, 54,76, 77,110,150
π, число 7, 73, 80, 84, 85, 87-89, 91, 93, 98,137

Архимед из Сиракуз жил в эпоху войн, поэтому неудивительно, что часть своего дарования он направил на создание машин, призванных защитить его родной город. Ученый внес серьезный вклад в эту сферу деятельности; впрочем, как и во все другие, входящие в круг его интересов: математику, физику, инженерное дело, астрономию… Он

вычислил площадь сегмента параболы с помощью метода, который можно считать предвестником интегрального исчисления. Он открыл физические законы работы рычага и даже осмелился сосчитать количество песчинок, которыми можно было бы заполнить Вселенную. - такое огромное число, что Архимеду пришлось изобретать собственный способ его записи! Но более всего древнегреческого ученого прославило открытие закона гидростатики, носящего теперь его имя. Данный закон, без сомнения, является одним из самых важных в истории, и он по праву удостоился того радостного возгласа, который с тех пор стал символом научного открытия: «Эврика!»